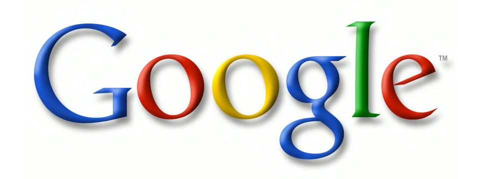



NON
CIRCULATING

INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE,

ENRICHIES

DE NOTES CRITIQUES ET PHILOSOPHIQUES

SUR LA NATURE ET LES DÉVELOPPEMENS de l'Esprit humain :

AVEC UN DISCOURS SUR L'ÉTUDE des Mathématiques, où l'on essaie d'établir que les Enfans sont capables de s'y appliquer, augmenté d'une Réponse aux Objections qu'on y a faites.

OUVRAGE UTILE, NON-SEULEMENT à ceux qui veulent apprendre ou enseigner les Mathématiques par la voie la plus naturelle, mais encore à toutes les Personnes qui sont chargées de quelque Education.

Par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal, de l'Académie de Lyon, de celle de Rouen, & de la Société Royale de Londres.

QUATRIEME EDITION,

Revue, corrigée & augmentée par l'Auteur.

TOME PREMIER.

Fremiet

A PARIS,

Chez DEBURE Pere, Libraire, Quai des Augustins, à l'Image S. Paul.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

AVIS DU LIBRAIRE
AU PUBLIC,

Sur la quatrième ÉDITION *des Institutions de Géométrie, & sur les autres Ouvrages Mathématiques de M. de la Chapelle.*

DEBURE, Pere, Quai des Augustins, ayant fait l'acquisition du *Privilége pour l'impression* & la vente des INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE, DU TRAITÉ DES COURBES ANCIENNES OU SECTIONS CONIQUES, & de L'ART DE COMMUNIQUER SES IDÉES dans l'éducation, par M. de la Chapelle, Censeur Royal, Membre des Académies de Lyon, Rouen, & de la Société Royale de Londres, a cru devoir retracer en peu de mots le tableau de ces différentes Productions.

LES INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE, enrichies de Notes critiques & philosophiques sur les développemens de l'Esprit humain, dont on annonce ici une quatrième Edition, ne sont point des Elémens de Géométrie à l'ordinaire; c'est, à proprement parler, un Traité sur la génération & l'enchaînement des connoissances humaines.

Pour avoir une base sur laquelle on pût établir un édifice solide, on a choisi la Géométrie, dont les premiers principes se tirent de nos sens bien conditionnés, & dont les conséquences, les plus immédiates, sont dûes au raisonnement le plus simple, on oseroit

presque dire, le plus brut. Aussi les hommes cultivés ou sans éducation, de quelque pays, de quelque Gouvernement, de quelque Religion, de quelque état qu'ils soient, reçoivent ces premières vérités sans aucune résistance, sans aucune opposition, sans aucune contradiction; dans l'intervalle d'un Pôle à l'autre, rien ne change en Géométrie. Non-seulement les vérités n'en sont pas contestables, elles ne sont pas même contestées.

Cette base des connoissances humaines, une fois bien établie & avouée de tous les hommes généralement quelconques, l'Auteur ne va point se livrer à des conjectures sur l'origine des vérités géométriques; il place ou plutôt il montre l'homme dans des circonstances qui lui imposent la nécessité de faire une découverte, nécessité tirée de ses besoins dans l'état de société; il faut donc qu'il fasse cette découverte, ou qu'il se manque à lui-même. L'amour-propre de tout Être vivant, & l'envie d'être mieux, si naturelle à l'homme, le déterminent aux recherches, aux expériences, aux observations; & c'est ainsi infailliblement que les vérités nécessaires, utiles & curieuses, se sont présentées à l'esprit de l'homme.

L'Auteur a commencé par les plus indispensables, comme étant les plus simples ou les moins recherchées, & tracées en quelque sorte par les premières impulsions de la nature : après celle-ci on voit naître, par une chaîne non-interrompue, des vérités d'un ordre plus élevé; mais elles doivent toujours leur naissance à des besoins plus délicats; &, comme un besoin en attire un autre, les vérités ou les découvertes Géométriques ont suivi le même ordre. Nos

connoissances se sont donc accrûes à mesure que nos besoins se sont multipliés, ou que nos goûts se sont perfectionnés. Ainsi les Institutions de Géométrie sont une espèce d'édifice où l'on voit la naissance, l'adolescence, & l'âge viril des connoissances humaines les plus infaillibles & les plus incontestables; la théorie & la pratique y marchent d'un pas égal, l'une y est toujours le flambeau de l'autre. On peut voir plus en détail les développemens ou l'analyse de cet Ouvrage dans l'Avertissement de la troisième Édition & dans le discours sur l'Etude des *Mathématiques*, qui sont à la suite de cet Avis.

Cette quatrième Édition a été revue & corrigée avec soin par l'Auteur, il l'a même augmentée de deux problêmes, qui pourront paroître aussi utiles que curieux, & dont il croit la solution aussi simple que les questions peuvent le comporter. Nous osons donc assurer le Public que ces caractères donnent à cette quatrième Édition quelque supériorité sur les précédentes.

Le Traité des SECTIONS CONIQUES ET AUTRES COURBES ANCIENNES, APPLIQUÉES OU APPLIQUABLES A DIFFÉRENS ARTS, a été composé dans le même esprit que les INSTITUTIONS de GÉOMÉTRIE. Mais l'homme ayant déjà une bonne provision du nécessaire, s'est porté d'abord à la spéculation sur ces Courbes par un pur esprit de curiosité. Ses connoissances étoient déjà fort avancées là-dessus, lorsqu'on s'apperçut & que l'on démontra, il n'y a pas encore un siècle, que les grands mouvemens de la Nature, ceux des Astres s'éxécutoient dans des sections coniques. L'Astronomie est nécessaire dans tous

Etat policé & commerçant, elle fixe les époques, elle fonde la Géographie, elle assure la Navigation. Voilà donc le curieux qui donne naissance à l'utile.

On avoit déjà vu que les propriétés de ces lignes pouvoient s'étendre à beaucoup d'autres usages; que l'Architecture, l'Artillerie, l'Art des Télescopes, celui des Porte-voix, &c. pouvoient en tirer de très-grands avantages. Ils sont ici démontrés en grand nombre & dans un assez grand détail.

C'est un spectacle, ce semble, fort curieux & très-agréable de voir des vérités abstruses venir satisfaire des besoins fort communs. On est conduit à tous ces secrets comme par la main; les propriétés de ces Courbes se découvrent graduellement, en s'engendrant immédiatement les unes les autres; & quand on a une provision suffisante de vérités pour en faire l'application, les Arts viennent se présenter comme d'eux-mêmes pour s'en enrichir.

Cela donne occasion à des dissertations sur leur origine & sur les Auteurs qui les ont inventés ou perfectionnés. On a donc le plaisir de trouver, dans le même Ouvrage, la lumière de la théorie, le fruit de l'application, & le délassement de l'histoire.

L'ART DE COMMUNIQUER SES IDÉES dans l'éducation est comme le complément des deux précédens. L'Auteur n'avoit guère pu méditer sur l'Art de présenter les vérités Mathématiques, sans étendre ses vues à d'autres objets. La Religion, les Langues, l'Histoire, la Dialectique, la Physique, se développent par une suite d'explications, analogues à des leçons de Géométrie bien entendues. Les faits sont com-

me les Axiomes de l'Hiſtoire & de la Religion. Les aſſertions hiſtoriques ont pour baſe ces premiers faits; & ſi l'on pouvoit faire abſtraction des paſſions de l'Ecrivain, qui brouillent ou qui intervertiſſent tout, on verroit le génie Mathématique préſider à un tableau d'hiſtoire, comme à une démonſtration de Géométrie. On ſe rend ſans réſerve à cette dernière, parce qu'on ne ſçauroit y faire un pas ſans un conſentement forcé. Tel eſt l'aſcendant d'une vérité apperçue, qu'il eſt impoſſible de la méconnoître.

Quand les monumens de l'hiſtoire ſont incertains, quand les faits ſe perdent dans la nuit des tems, il y a un calcul de probabilités qui a ſes loix mathématiques; car le plus grand nombre des motifs combinés avec leurs poids, doit néceſſairement entraîner le jugement.

Le développement des idées, dans quelque Science que ce ſoit, ſe fait donc, pour ainſi dire, ſur une même ligne; il faut toujours partir des premières fonctions de nos ſens, aller par degrés du plus ſimple au plus compoſé, du plus connu au moins connu, & renvoyer toujours le plus loin qu'on peut les idées métaphyſiques, qui ne peuvent bien s'établir que dans des têtes fort exercées par une longue ſuite d'expériences & d'obſervations.

L'Auteur donne des modèles de ces routes dans tout le cours de ce dernier Ouvrage, & il ſe perſuade qu'il eſt enfin parvenu à produire cet Art ſi rare, que tout le monde croit poſſéder, ce véritable Art de Communiquer ses Idées dans l'éducation publique ou particulière.

PRIX desdits Ouvrages.

LES INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE, 2 vol. 9 livres reliées, & 7 livres 16 sols brochées.

Le Traité des SECTIONS CONIQUES & autres COURBES ANCIENNES, 1 vol. in-8. 6 livres relié.

L'ART DE COMMUNIQUER SES IDÉES dans l'Education, in-12, 1 liv. 10 f. broché.

Ceux qui auroient des Obſervations de quelque importance à communiquer à l'Auteur pour la perfection de ſes Ouvrages, rélativement à l'eſprit dans lequel il les a compoſés, ſont priés de le faire par la voie du Mercure.

Novembre 1764.



AVERTISSEMENT

Sur la troisième Edition, dont la lecture est nécessaire pour juger du fond & de la forme des augmentations qui l'enrichissent.

J'ai annoncé par un *Prospectus*, il y a plus de trois mois, l'Edition qui vient de paroître; on y remarqué ma très-grande disposition à faire usage des observations du Public, pour rendre mon Ouvrage digne de plus en plus de son attention. Je le répète, travailler pour toutes sortes d'esprits, c'est un but que je ne crois pas possible d'atteindre. On est prolixe pour les uns, on est trop serré pour d'autres. Il y en a qui voudroient toujours un style grave, également soutenu, & sans aucuns ornemens étrangers; un assez grand nombre se fatiguent aisément du sérieux; ceux-là se contentent de la clarté & de la méthode; ceux-ci aiment les digressions, & que le plaisir de s'instruire en fasse disparoître le travail.

Dans l'impossibilité de réunir tous les goûts, je me suis déterminé à celui qui m'a paru le plus approprié au caractère général de la Nation, & j'ose le dire, de toutes les Nations; il n'y en point qui ne veuille arriver au but avec le moins de frais & le plus d'agrément qu'il lui soit possible. Une profonde attention coûte toujours beaucoup à la plû-

part des hommes : éxiger d'eux qu'ils faſſent taire leurs ſens, c'eſt leur demander qu'ils ſe ſéparent d'eux-mêmes ; ils ne ſentent que par-là leur éxiſtence. Les Arts de goût ne ſont ſi généralement cultivés, que parce qu'ils ont nos ſens pour premiers miniſtres, & que des impreſſions douces en ſont à la fois le fruit & l'engagement.

J'ai cherché à porter dans mon Ouvrage une partie de cet attrait, ſans lui rien enlever de ſa ſolidité. On m'a fait peu d'objections pour l'Edition précédente ; & quoique j'en aye ſollicité pour celle-ci, il ne m'en eſt point venu. Au défaut des obſervations du Public, j'ai été forcé de recourir aux miennes. On doit en ſentir toute l'imperfection ; mais je puis répondre que les augmentations conſidérables, dont cette troiſième Edition eſt enrichie, ne le cèdent à aucune autre partie ni par le fond ni par la forme, ainſi que l'on peut en juger, ſoit par la Table des Matières, ſoit par le compte que j'en ai déjà rendu, & que je crois à propos de répéter ici.

En faiſant moi-même la critique de mon propre Ouvrage, j'y ai trouvé beaucoup de fautes d'omiſſion ; elles ſont amplement réparées dans cette Edition-ci. Une de mes principales vues avoit été de convaincre le Public, que l'Algèbre & la Géométrie étoient très-utiles dans les profeſſions les plus communes. Les faits ſont la Métaphyſique du gros du monde, & dans l'Algèbre j'avois un peu

négligé cette Métaphysique; aussi ai-je augmenté l'article des Equations de trente ou quarante pages. Toutes les questions que j'y propose y sont utiles; mais j'ai voulu que l'utile fût curieux. Des Règles d'Escompte droites & inverses, celles des Lettres de Change, les Problêmes d'alliage de toute espèce, déterminés & indéterminés, y sont exposés & démontrés avec tout le soin dont je me suis trouvé capable. Jamais une question n'y paroît qu'amenée par les circonstances qui l'y font naître: on y sçait toujours d'où l'on vient, où l'on va, & pourquoi l'on va. Je ne dis point, par exemple, *soit une Equation du second ou du troisième degré qu'il faut résoudre*, comme si je me proposois une question extraordinaire, uniquement pour faire parade d'une difficulté vaincue. Mais, en me suivant, on s'apperçoit que beaucoup de gens y sont jetés, sans y penser, par des besoins très-fréquens & très-communs. Une simple administration de tutelle y conduit. Assurément cela n'est pas rare. J'y montre une source des Equations de tous les degrés, & ce sont les intérêts des intérêts qui donnent cette progression de puissances. J'en prends l'occasion de résoudre un Problême du second degré, comme j'en pouvois prendre celle d'en résoudre un du troisième, du quatrième, &c.

En procédant à la résolution de ces Problêmes, je ne m'éleve pas tout à coup à ces expressions générales, qui montrent, du point le plus sublime

& avec trois ou quatre symboles, une infinité de questions utiles, résolues avant qu'on les propose ou même qu'on les imagine. Cette espèce d'enthousiasme Algébrique, en servant la paresse & la vanité de l'Ecrivain, auroit pu faire le désespoir du Lecteur; je me le suis défendu. Toujours occupé de la manière dont les idées entrent & se succèdent dans l'ame, jamais les générales ne se sont présentées les premièeres à mon esprit. *Un même corps ne sçauroit être à la fois en plusieurs lieux.* Je n'ai osé faire cette assertion en homme sage, qu'après des millions d'expériences; encore suis-je tenté bien des fois d'en douter, quand je me vois dans un miroir, ou que je regarde des objets avec un verre à facettes.

Je fais donc suivre aux commençans cette gradation d'idées, dont la nature nous montre la marche. On s'élève sans effort, quand on monte par degrés. J'expose souvent sous différents points de vue plusieurs cas d'une même question; je les discute, je les analyse, j'en montre les rapports. On acquiert insensiblement l'habitude de comparer; & c'est de-là que viennent les idées & les expressions générales si fécondes en Mathématiques.

Des notes faites avec attention, & assez multipliées, viennent étendre toutes ces vues, qui ne paroissoient propres qu'à l'Algèbre; on en voit l'application à la conduite de la vie, à la Magistrature, à la Politique, &c. On y verra même les

Abeilles donner à l'homme des leçons de Géométrie utile, sans luxe, sans superflu, montrant la plus parfaite économie dans la construction de leurs alvéoles. On y verra, sous l'apparence d'un prix très-vil, le piège tendu à l'ignorance ou à l'esprit inconsidéré, qui s'engage dans certains paris : en un mot cette troisième Edition est augmentée d'un quart de Volume, au moins, & toute remplie de je ne sçais combien de questions curieuses & utiles, dont l'exposition convient plus à un Extrait qu'à *un simple Avis*.

Si le style de cet Ouvrage n'a pas été dicté par cet Art magique de la parole, qui sçait persuader indépendamment des raisons, je prie le Lecteur de considérer que rien n'est permis ici que l'éloquence de la vérité.



TABLE
DES CHAPITRES

Et des principales matières contenues dans le premier Tome.

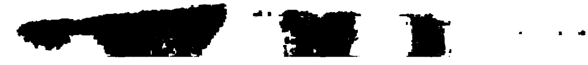
En

DE L'ALGÈBRE.

CHAPITRE I.

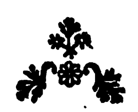
INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.



Problême

Fin de la Table des Chapitres.



PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans-Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amé le Sieur Abbé LA CHAPELLE Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public les Œuvres de sa composition ayant pour titres: *Institutions de Géométrie, les Sections Coniques, & l'Art de communiquer ses Idées*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Sieur Exposant & ses ayans causes, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdites Œuvres autant de fois que bon lui semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de *douze* années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes: Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance: Comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdites Œuvres, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Sieur Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Sieur Exposant, ou à celui qui aura droit de lui; & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdites Œuvres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modèle sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdites Œuvres, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle dudit Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Garde-des-Sceaux de France, le Sieur FEYDEAU DE BROU; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Sieur Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement; voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdites Œuvres, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au pre-

mier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Paris, le troisieme jour du mois d'Août, l'an de grace mil sept cent soixante-trois, & de notre Regne le quarante-huitieme. Par le Roi en son Conseil. LE BEGUE.

Registré le présent Privilége, ensemble la Cession, sur le Registre XV. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 1073. fol. 457. conformément au Réglement de 1723. qui fait défenses, article XLI. à toutes personnes de quelques qualités & conditions qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; & à la charge de fournir à la susdite Chambre neuf exemplaires prescrits par l'article CVIII. du même Réglement. A Paris, ce 25 Août 1763.

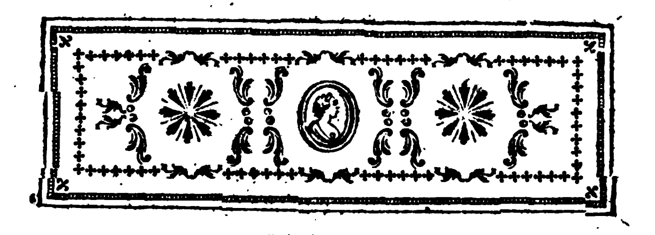
LE BRETON, *Syndic.*

Je soussigné reconnois cejourd'hui & pour toujours avoir cédé & transporté au Sieur JEAN DEBURE *père, Libraire à Paris, le Privilege général qui m'a été accordé par le Roi pour tous mes Ouvrages suivans; sçavoir, mes* Institutions de Géométrie; *mon livre des* Sections Coniques, *& celui de* l'Art de communiquer ses Idées, *pour en jouir par lui ou ses ayans cause, comme de choses à lui appartenantes, suivant les conventions faites entre nous. A Paris, ce 8 Août 1763.*

LA CHAPELLE.



DISCOURS



DISCOURS
SUR L'ÉTUDE
DES MATHÉMATIQUES,

Où l'on essaie d'établir que les enfans sont capables de s'y appliquer.

PREMIERE PARTIE.

LES opinions prennent ordinairement naissance dans la coutume. On renvoie presque toujours aux derniers tems de l'éducation l'Étude des Mathématiques, & l'on croit que cela est très-bien fait.

Nous nous proposons l'examen de cet usage; voici quel est notre plan. Comme une question bien exposée est à moitié résolue, on va, par un détail bien circonstancié, établir précisément ce dont il s'agit. Quand notre objet sera en évidence, nous parcourrons les moyens d'y atteindre, nous examinerons nos facultés, par-là; nous nous assurerons si notre fonds est suffisant; & s'il l'est, nous tâcherons de le mettre en valeur.

On a donné le nom de *corps* à tous ces objets qui frappent nos sens, qui nous environnent,

dont nous ſentons les rapports continuels avec notre être.

Tout le monde a éprouvé qu'on pouvoit les parcourir, & qu'on les parcouroit en effet; c'eſt-là de l'*étendue:* que cette étendue avoit différens ſens, différentes directions; ce ſont ſes *dimenſions:* que l'on évaluoit ces dimenſions, en les rapportant à une dimenſion déterminée; que par cette comparaiſon on les trouvoit égales ou plus longues, ou plus courtes; c'eſt ce qu'on appelle *meſurer.*

On ſçait encore qu'une diſtance ne s'eſtime que par ſa *longueur;* mais que l'étendue d'un appartement s'évalue en combinant ſa longueur avec ſa *largeur*; & qu'enfin il faut ajouter à ces deux dimenſions l'*épaiſſeur*, pour avoir d'une poutre une idée complette.

C'eſt ſur ces dimenſions ſi matérielles & ſi diſtinctes, que la Géométrie fait ſes recherches & ſes obſervations: elle emploie les opérations d'une autre ſcience, que l'on appelle *Arithmétique*, qui conſiſte à repréſenter par certains ſignes, toujours très matériels, les combinaiſons que l'on peut faire des dimenſions de la matière.

Juſqu'ici, & c'eſt de-là que la Géométrie part, nous n'avons encore rien que de très-ſenſible, de très-palpable; toutes choſes dont les ſens rendent témoignage à ſix ans comme à trente.

Car je laiſſe les diſcours alambiqués de ces Métaphyſiciens pointilleux, qui veulent abſolument que la Géométrie ait ſes articles de foi comme la Théologie.

Ils ne ceſſent de lui reprocher, que ſes ſurfaces, ſes lignes, ſes points, n'exiſtent pas dans la matière.

Je ne vois cependant rien qui ſoit plus continuellement en expérience. Les Géomètres n'ont

point de lignes, de surfaces, de points différens de ceux que la matière leur offre; ils mesurent ce qu'ils voient, ce qu'ils touchent, ce qu'ils parcourent.

Il est donc évident, que les premiers élémens du Géomètre posent sur la matière la plus exposée à nos sens; que toute la différence qui se trouve entre un homme ordinaire & celui qui a quelque teinture de Géométrie, c'est que le premier n'a pas été plus loin que les premières notions, & que le second en a suivi le développement. Mais les sens ont toujours servi de conducteurs. Il n'y a eu en tout cela *que des lignes plus ou moins longues*, des angles plus ou moins grands, des surfaces plus ou moins étendues, des corps plus ou moins épais.

En déduisant des premières perceptions les propriétés les plus éloignées de leurs principes, il n'a fait que comparer: comparer, c'est mesurer. Je vois toujours les sens en exercice. Veut-il les rappeller à leur origine, & les ranger dans l'ordre de leur génération? c'est encore une affaire de mémoire; & la mémoire dépend des sens: elle n'est que le miroir de ce qu'ils ont vu.

Je ne dis pas que dans une figure compliquée, les sens apperçoivent la grandeur relative des angles & des lignes; mais je me souviens que des figures plus simples m'ont offert les rapports de ces lignes ou de ces angles placés dans les mêmes circonstances. Ce que j'ai vu m'assure de ce que je ne vois pas.

Un angle ne me paroît pas droit; le parallélisme d'une ligne n'est pas décidé. Je fais passer en revue tous les symptômes qui peuvent m'annoncer la présence d'un angle droit ou d'un parallélisme; véritable jeu de ma mémoire, qui fait la fonction de mes sens.

Mais, dira-t-on, c'est ici la grande difficulté. Comment voulez-vous embrasser l'enchaînement d'une longue suite de propositions, sans avoir l'intelligence bien affermie ?

1°. Cette chaîne de propositions ne se rencontre guères dans les élémens où une vérité se manifeste à l'aide de trois ou quatre autres tout au plus.

2°. A mesure que les vérités se placent dans la tête, l'intelligence prend de la consistance : peu-à-peu elle acquiert la force de se soumettre ce qu'il y a de plus élevé.

3°. Enfin, voyons ce qui se passe en nous, quand nous lions dix vérités ensemble, que nous passons de la première à la seconde, de la seconde à la troisième, &c.

On trouvera, ce me semble, que, pour arriver au bout de la chaîne, on a précisément besoin d'appercevoir bien clairement une liaison nécessaire entre la seconde & la premiere, que l'on suppose d'abord, ou évidente, ou démontrée ; que l'on a droit ensuite, sans s'embarrasser de la premiere, de se reposer sur la seconde, pour tenter le passage à la troisième. Ce passage une fois franchi, vous négligez tout le chemin fait, & vous ne mettez plus votre attention qu'à vous assurer de la connexion de la troisième à la quatrième ; & ainsi de suite.

Je ne conçois pas que l'on puisse autrement conserver ou acquérir l'évidence des vérités fort éloignées de leurs principes. Or la difficulté n'est pas grande ; il n'y a jamais qu'un simple raisonnement à saisir.

Les sens sont donc, en Géométrie, nos premiers maîtres, & ils conservent une grande autorité dans toute la suite de nos raisonnemens.

On ne seroit pas fondé à dire que les enfans

n'apperçoivent pas les premières propriétés des corps aussi bien que les hommes faits ; ils donnent des signes évidens du contraire : on ne les voit occupés qu'à cela. D'un autre côté, un raisonnement simple sur les choses de leur portée, ne les touche pas moins que les objets les plus matériels ; enfin on ne leur conteste pas la mémoire.

Pour peu maintenant que l'on suive les développemens de l'esprit humain, que l'on fasse attention à cette extrême curiosité qui agite les enfans, à cette mobilité qui les pousse aux opérations méchaniques, nous ne doutons pas que l'on ne se rapproche de l'idée, que peut-être de toutes les sciences, celle des Mathématiques est la plus à portée des enfans.

Des angles, des lignes, des cercles, ne sont faits que pour frapper les sens ; il n'y faut guères autre chose que les yeux & la main.

Joignez-y seulement la portion d'intelligence nécessaire, pour appercevoir que deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles ; (vérité d'ailleurs qui se manifeste tout matériellement, en posant deux grandeurs sur une même mesure qui leur soit égale). En voilà assez pour découvrir dans la matière un grand nombre de rapports, & pour accoutumer l'esprit à des vérités solides.

Au pis aller, quand cette suite de vues ne seroit que de la mémoire, elle seroit toujours fort préférable à ce faux merveilleux dont on remplit la tête des enfans.

Sans avoir beaucoup d'expérience, on sçait que les idées qui nous viennent par les yeux, font des traces beaucoup plus profondes dans le cerveau, que celles qui ne portent que sur des mots. Que le discours vous peigne dix mille fois, avec les traits

les plus reſſemblans, un homme que vous n'avez jamais vu, jamais vous ne le reconnoîtrez ſi bien que ſi vos yeux l'avoient remarqué une ſeule fois.

L'organe de la vue vient preſque toujours au ſecours en Géométrie : il s'y agit, au moins auſſi ſouvent, de voir, que de ſe reſſouvenir. On eſt un peu trop prévenu que cette ſcience ne combine que des idées abſtraites.

Cependant nous ſommes naturellement portés à compter & à meſurer : le ſeul inſtinct nous mène là.

Des enfans prennent-ils la largeur d'un chemin ? la perpendiculaire eſt la ligne qu'ils cherchent ; (ils n'en ſçavent pas le nom, mais le nom ne fait rien aux idées). Ils ne veulent pas qu'elle biaiſe ; ils ont grand ſoin que celui qui eſt à l'autre bout de la corde, ſoit bien de face avec le premier : ils font de la Géométrie ſans le ſçavoir.

Nous ne croyons pas dégrader cette ſcience, en diſant qu'elle ne nous préſente d'abord que des idées ſenſibles ; elle eſt aſſez relevée par ſa certitude & par ſon utilité ; elle peut donc prendre facilement ſur des eſprits qui ne font encore uſage que de leurs organes.

Il n'en eſt pas ainſi des Belles-Lettres, des compoſitions de goût. La connoiſſance du cœur humain, de ſes paſſions, de ſes fantaiſies, un long uſage des coutumes, des préjugés, des bienſéances, une habitude de voir le ridicule, de ſçavoir le ſaiſir où il eſt, & d'en placer la peinture où il faut, doivent avoir préparé l'eſprit à la lecture des ouvrages de ce genre.

Tout le monde ſçait, que Virgile, Horace, Ovide, Catulle, que tous les Ecrivains polis démêlent dans les paſſions ce qu'il y a de plus ingénieux.

Où veut-on que les jeunes gens prennent un

modèle sur lequel ils évaluent ces Auteurs ? Ou ils n'ont pas assez vécu, ou, ce qui revient au même, ils n'ont pas assez réfléchi. Horace & Virgile doivent être lus à quinze ou vingt ans, où l'on a déjà quelques principes de goût & de mœurs. Euclide peut être étudié à six ans ; l'on a à cet âge des yeux & des mains.

L'important, à l'égard des enfans, est d'exciter leur attention. De la matière, des figures, du mouvement, rien n'est plus propre à cet effet. Ils tiennent continuellement à ces choses, & ils veulent y tenir. Pourquoi apprennent-ils si facilement à jouer à des jeux qui demandent des combinaisons assez fines? c'est que tout y parle aux yeux.

Ne donnons point à la raison un air étranger, laissons-la paroître sous sa forme naturelle, bien revêtue des qualités sensibles, sa première & apparemment son unique origine.

On se tourmente beaucoup à faire apprendre. Peut-être seroit-il plus raisonnable de travailler beaucoup sur la manière d'apprendre ; les difficultés vaincues d'un côté n'en laisseroient guères de l'autre.

Les purs spéculatifs n'approuveront pas les vues que nous avons de tourner continuellement l'esprit vers la matière.

Nous ne désespérerions pourtant pas de les amener à notre avis, s'ils pouvoient s'accommoder de l'idée que l'on se perfectionne dans l'usage de sa raison, comme dans l'exercice des Arts méchaniques.

Le Politique & le Philosophe ne se forment pas autrement que l'Architecte & l'Astronôme ; & ces derniers se forment ainsi que le Maçon & l'Arpenteur.

Chacun, de son côté, fait & refait, répète dix

mille fois les actes qui forment les habitudes de son état. L'Astronôme observe ; c'est aussi ce que fait le Politique : tous deux font de leurs yeux le plus d'usage qu'il leur est possible.

L'objet de la Géométrie est bien autrement sensible que celui du Politique & de l'Astronôme. L'excessive distance des Astres, les ruses de l'intérêt, & les souplesses de l'amour-propre, répandent bien des nuages sur les yeux des observateurs : avec de longs travaux & des réfléxions profondes, ils ne peuvent souvent parvenir qu'à nous donner des conjectures.

Les Géomètres ne sçauroient être plus près de leur objet qu'ils le sont, ils le voient & ils le touchent.

On ne peut donc rien trouver qui soit mieux assorti au caractère des enfans, qui veulent toujours agir, voir, toucher, que la science des Mathématiques, très-visible & très-maniable en ses élémens.

Tracer une ligne, décrire un cercle, élever une perpendiculaire, mener des parallèles, tirer des tangentes, former des angles, les mesurer, les aggrandir, les diminuer; toujours de l'action, toujours de l'amusement, & par conséquent toujours du progrès. On retient avec plaisir les leçons que le plaisir donne.

Puisque la raison se perfectionne par l'exercice, comme tout le reste ; que les vérités élémentaires nous viennent par les sens ; que les figures que l'on apperçoit par-tout, rappellent sans cesse les idées Mathématiques ; que la mémoire supplée aux sens, quand les objets matériels manquent de nous affecter : pourquoi les enfans, qui ont des yeux & de la mémoire, se refuseroient-ils à des idées qui sont si proportionnées à ces sens ?

Aussi l'expérience est-elle hautement pour nous.

Si le préjugé dominant empêche que l'on en fourniſſe un grand nombre d'exemples, au moins tous ceux que l'on a, témoignent en faveur de cette idée.

C'eſt un fait que l'on eſt très-à-portée de vérifier à Paris, où il n'eſt pas rare de trouver des pères de famille, qui ne livrent pas au préjugé vulgaire l'éducation de leurs enfans, & auprès de qui, une coutume généralement reçue, n'en eſt pas moins généralement mauvaiſe; c'eſt un fait, que des enfans mis aux Mathématiques dès l'âge de ſix ans, y font non-ſeulement des progrès très-ſenſibles, mais qu'ils ſe portent aux opérations de ces ſciences avec une ſorte de volupté.

Il n'y a guères plus de quinze ans que cette opinion parut, pour la première fois, avec tout le cortège de ſes vraiſemblances, de ſes preuves & de ſes démonſtrations. Ceux qui la trouvèrent étrange, le ſont devenus eux-mêmes, tant ſes progrès ont été rapides; mais elle vient d'acquérir un grand poids par l'exemple le plus illuſtre & le plus complet que l'on puiſſe déſirer, dans la perſonne de feu MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE, qui n'avoit pas ſix ans révolus.

La ſageſſe & la prudence du Roi n'ont permis que des eſſais ſur une tête ſi tendre & ſi précieuſe. L'intelligence & le courage de Madame la Comteſſe de Marſan, le zèle & l'habileté de M. le Blond, en ont fait un chef-d'œuvre. Encore n'accordoit-on la Géométrie à MGR. LE DUC DE BOURGOGNE qu'à titre de récompenſe, Madame la Comteſſe de Marſan ayant jugé que, s'il falloit quelques efforts pour faire ſes plaiſirs de ſon devoir, on ſe faiſoit toujours très-volontiers un devoir de ſes plaiſirs.

En effet, rien ne peut être mieux reçu des hommes, que ce qui leur prouve leur supériorité : telle est l'heureuse illusion de la Géométrie, que nous croyons avoir inventé les figures que nous avons construites de nous-mêmes, ou les problêmes que nous avons résolus : c'est que la vérité appartenant à celui qui la voit, nous dispense d'en faire hommage à quelqu'autre ; & l'on ne peut pas manquer d'être content d'une acquisition importante, que l'on ne doit qu'à soi-même.

Les enfans marquent, bien autrement que les hommes faits, les caractères d'indépendance ; ils ne se plaisent tant aux objets de leur amusement, que parce qu'ils les ont choisis eux-mêmes.

La nature n'étant qu'un vaste livre, qui répète sous mille formes différentes les notions Géométriques, les enfans aimeront à y reconnoître des angles, des cercles, des quarrés, des parallèles.

Appliquant ainsi leurs premières idées, ils exercent d'eux-mêmes leur petit raisonnement. Si on les écoute, que l'on applaudisse à leurs essais, leur machine se monte à raisonner : cette habitude influe sur les autres objets de l'éducation.

Naturellement nous sommes portés à imiter ceux avec qui nous vivons. A force de demander aux enfans pourquoi tels & tels procédés pour mener une parallèle, ou pour tirer une tangente ; ils vous demanderont à leur tour, pourquoi une pierre va se perdre au fond de l'eau, pourquoi le bois y surnage, pourquoi l'eau elle-même s'élance en l'air en certains cas.

Par-là, ils verront les choses, au lieu de les rete-

nir. L'esprit passera peu à peu des opérations de la mémoire à celles de l'intelligence. En un mot, ils seront frappés d'une lumière, & non pas chargés d'un poids.

Avoir fait sentir que les enfans étoient capables d'entendre les Mathématiques, c'est avoir démontré la nécessité de les leur apprendre dès l'âge le plus tendre. L'utilité de ces connoissances est si généralement reconnue, qu'il seroit superflu d'en donner des preuves.

Mais risquerai-je une conjecture? Je suis tenté de croire que les vérités Mathématiques ne sont jamais si utiles, que quand elles sont enseignées dès les premières années de l'éducation.

Mon opinion est fondée sur ce que les enfans, peu capables d'appercevoir par eux-mêmes, ne voient que ce qu'on leur montre. Vuides encore de toutes connoissances, leur cerveau ne demande qu'à se remplir; il reçoit tout, il ne refuse rien. Voyez avec quelle facilité les absurdités mêmes viennent s'y placer!

Ajoutez à cela, qu'une raison plus formée envisage sur son objet une foule de difficultés qui l'arrêtent: les enfans n'y pensent pas, & même n'y peuvent pas penser.

C'est que les difficultés ne viennent que des sujets de comparaison ausquels nous rapportons tout ce que l'on offre à notre intelligence; distraction, qui manquant aux enfans, ne leur donne pas lieu d'être difficultueux, & ne leur laisse que de la curiosité.

Il est donc très-important d'être fort réservé sur les premières impressions que leur cerveau peut recevoir, & de ne leur présenter que celles qui peuvent être la source d'un discernement sûr & d'une conduite juste.

Les obſtacles que les enfans oppoſent de ce côté, ſont beaucoup moins conſidérables que ceux qui ſont à ſurmonter dans les perſonnes un peu plus faites.

Les hommes ont naturellement le deſir de ſe diſtinguer: de cette paſſion, la ſociété en a fait l'envie de plaire. Les jeunes gens, près d'entrer dans le monde, ne recherchent que les connoiſſances qui décorent, ou les talens qui rendent agréables. Avec les Mathématiques, on n'eſt ni joli, ni plaiſant. C'eſt un tems perdu pour les agrémens que le tems employé à l'acquiſition de ces ſciences: on les néglige.

Les enfans au contraire n'ont pas encore beſoin de ces connoiſſances, qui font l'amuſement du monde; ils ne voient rien à perdre pour eux, d'apprendre une ſcience inutile à un deſſein qu'ils n'ont pas encore. Peu leur importe d'ignorer ces jolies bagatelles, ces ſentimens artificiels, dont il faut ſe parer dans le commerce du monde; acquiſition néanmoins qui coûte peut-être à l'eſprit des combinaiſons plus fines, que la découverte de bien des vérités qui ont illuſtré leurs inventeurs.

Mais voici une conſidération d'une toute autre importance. A quinze ou vingt ans, la tournure de l'eſprit eſt à-peu-près acquiſe, les nouvelles connoiſſances ne vont plus juſqu'au fond du caractère; il eſt formé, & l'on vient trop tard pour le changer.

On pourra bien charger la mémoire ou l'intelligence de différentes vérités; mais alors ce ne ſera point par elles que les objets ſeront apperçus. On ſe ſervira toujours des yeux d'une habitude antérieure. Nous ne voyons ordinairement que de la manière dont la première éducation nous a fait voir.

L'enfance a cet heureux avantage, de pouvoir prendre le pli qu'on veut. Elle n'en a aucun. Tournez-la du côté des Mathématiques, bientôt l'esprit de combinaison, qui caractérise si particulièrement ces sciences, ne sera plus distingué de son être personnel. Nous nous formons, pour ainsi dire, sur les choses que nous apprenons de bonne heure. Accoutumés à combiner, nous combinerons sur tout; & ce qui est un travail si pénible pour le commun des hommes, ne sera pour nous que la marche ordinaire de notre esprit.

Nous ne dissimulerons pas, que quelques personnes reprochent aux Mathématiques d'éteindre l'imagination.

La briéveté que nous nous sommes proposée ne nous permet pas de nous étendre sur la réponse à cette objection. On verra dans la seconde partie comment nous établissons, que les Mathématiques ont le double avantage de fortifier l'imagination & de la modérer.

Mais en attendant que nous exposions ce tableau, nous ferons remarquer que l'on peut anéantir l'objection sans ressource, moyennant cinq ou six faits: on en trouve chez les Anciens & chez les Modernes.

Pythagore étoit, de son tems, un très-grand Géomètre, & Platon avoit dans les Mathématiques des connoissances fort distinguées; cependant leur Géométrie est encore moins célèbre que leur imagination.

Paschal, presque de nos jours, a fait en Mathématiques de hautes découvertes. Mallebranche, Arnauld, Nicole, sçavoient fort bien la Géométrie. Nous croyons pourtant qu'on seroit fort embarrassé de nous opposer des personnes qui eussent l'imagination plus brillante, ou le génie plus fécond.

Combien verrions-nous s'accroître le nombre de ceux qui déposent en notre faveur, si nous prenions nos exemples parmi les illustres Géomètres avec qui nous vivons?

Il y en a des plus célèbres, qui sont, & beaucoup d'autres qui méritent d'être de l'Académie Françoise, société établie pour être la récompense des talens les plus aimables.

C'est sans doute l'amour des Belles-Lettres qui préoccupe ceux qui sont d'une opinion contraire à la nôtre.

Cependant, si un reproche se détruisoit par l'opposition d'un reproche, on diroit que les Belles-Lettres amollissent les mœurs. De quelque côté que l'on se tourne, il y a des inconvéniens.

Mais en général, il paroît que la société n'a pas moins besoin de bons esprits, que de beaux esprits (*).

La propagation de la raison universelle, cet instrument si utile au gouvernement des autres & de soi-même, est due principalement à des esprits méditatifs, qui ont plus recherché à remonter aux causes des évènemens, qu'à en jouir.

Descartes, Hobbes, Grotius, Léibnitz, ne faisoient point les agréables; mais ils ont autant contribué à notre bonheur, par le sérieux de leurs observations, que tous les beaux esprits du monde, par les amusemens qu'ils nous ont fournis.

Au reste, ce seroit prendre mal notre pensée, que de nous attribuer l'intention de mettre, s'il est permis de le dire, tout l'esprit d'un jeune homme en Mathématiques. Nous croyons seule-

(*) Ce n'est pas à dire que le bel esprit exclue le bon esprit: il nous semble seulement que les sciences sérieuses mènent au bon esprit un peu plus directement que les Belles-Lettres.

ment, que de toutes les ſciences qui concourent à perſectionner l'éducation, les Mathématiques ont droit au privilège d'être particulièrement cultivées: leurs principes ſont ſous nos yeux & ſous nos mains; des corps, un compas, une règle. Un enfant peut agir ici comme un homme fait; au lieu que les autres ſciences demandent, pour être raiſonnablement entendues, une ſuite d'expériences, qu'il n'eſt poſſible d'acquérir qu'après le tems de l'éducation.





SUITE DU DISCOURS SUR L'ÉTUDE DES MATHÉMATIQUES,

Où l'on essaie d'établir que les enfans sont capables de s'y appliquer. Réponse aux objections. Dessein de cet Ouvrage.

SECONDE PARTIE.

VOILA où finissoit ce Discours, lorsqu'il parut pour la premiere fois. Beaucoup de gens le condamnèrent sur la simple nouvelle de son existence: quelques-uns firent des objections; mais il eut le bonheur de réunir les suffrages de presque tous les Mathématiciens, principalement de ceux qui s'étoient le plus attachés à observer les développemens de l'esprit humain.

Une opinion fût-elle fausse, ceux qui la condamnent sans examen ne méritent aucune considération; mais on doit des égards à ceux qui en ont porté un jugement réfléchi. S'il est juste, nous apprenons à nous conduire sur de meilleurs principes; s'il ne l'est pas, il donne lieu à des éclaircissemens; & tout cela contribue à l'utilité publique, qu'un Écrivain doit envisager comme le but le plus honorable qu'il puisse se proposer.

Aussi

Aussi les esprits les plus modérés regardent la première production d'une idée nouvelle ou singulière, comme une tentative avec laquelle on ne doit que pressentir le goût du Public. C'est un avertissement qu'on lui donne, que s'il tournoit sa vue d'un certain côté, il pourroit y trouver des avantages jusqu'alors inconnus. En effet, les choses les plus utiles à la société sont négligées, moins parce qu'elles sont difficiles, que parce que l'on n'y a pas fait attention.

Cette manière de penser nous conduit à témoigner notre reconnoissance à ceux qui se sont donné la peine de réfléchir sur l'objet de ce Discours. M. de Mont-Carville (*a*), qui étoit alors du Journal des Sçavans, & habile Mathématicien, a fortifié notre opinion par un grand nombre d'idées, qui lui sont si propres, que l'on peut regarder son Extrait comme un nouveau Discours sur la même matière.

Le Pere Castel (*b*), dont le nom est si connu des Mathématiciens modernes, nous a honorés d'une approbation sans réserve sur le fond de notre sentiment. Cet Auteur célèbre observe que l'idée n'en est pas tout-à-fait neuve, qu'on a dû la remarquer en différens morceaux de sa composition, qu'il a publiés depuis vingt ans dans les Journaux de Trévoux; nous ajouterons de notre côté qu'elle n'avoit pas échappé aux anciens: Platon, Cicéron, & sans doute bien d'autres Philosophes sont entrés dans cette pensée; mais il y a bien loin d'une opinion que l'on approuve, à la découverte & à l'enchaînement des raisons qui servent à l'établir: quelques traits échappés, un mot dit à l'occasion de toute autre chose, font très-peu d'impression;

(*a*) Journal des Sçavans, mois de Septembre 1743.
(*b*) Journal de Trévoux, Février 1743.

il falloit traiter d'office cette matière ; ce qui n'avoit, au moins que je sçache, été exécuté par personne.

Nous ne pouvons pas non-plus nous dispenser de reconnoître publiquement combien nous avons été sensibles aux égards avec lesquels un troisième Critique (*) a censuré notre opinion. Il condamne absolument l'objet principal de ce Discours, qui consiste à faire sentir qu'il est plus avantageux de commencer les Mathématiques dès les premiers tems de l'éducation, que de les renvoyer à seize ou dix-huit ans, suivant l'usage le plus ordinaire. *Je crois*, dit cet Auteur, *qu'il est utile à tout le monde d'avoir une teinture des Mathématiques ; mais je ne pense pas qu'on doive renverser l'ordre de l'éducation, pour initier les enfans dans cette science, à moins qu'on ne les destine uniquement à une pareille étude, dans la vue de les préparer à une profession, dont les Mathématiques seroient la base.*

C'est nous accorder à-peu-près tout que nous demandons ; il y a un grand nombre d'états dans la Société qui exigent une connoissance assez étendue des Mathémathiques. La Peinture, l'Architecture, la Navigation, presque tous les Arts en ont besoin, mais principalement celui de la Guerre, où les plus petites fautes d'ignorance sont très-souvent funestes, ou pour le moins très-dangereuses.

Cependant, nous envisageons l'étude des Mathématiques beaucoup moins par l'utilité particulière qui en revient à tous les Arts, que par l'influence générale que ces sciences peuvent avoir sur les esprits. La rigueur & le scrupule avec lesquels les Mathématiciens observent les objets de leurs

(*) Journal hist. de Verd., Novembre 1743.

spéculations, accoutument l'ame à revenir sur elle-même, à se défier de ses premières vues; or se défier, c'est penser, c'est marcher dans la recherche de la vérité avec la circonspection d'un homme qui craint à chaque pas de tomber dans l'erreur qui l'environne. Cette disposition d'esprit constitue le principal mérite de ceux qui sont destinés à commander à d'autres.

En général, la sûreté des États, la législation & le commandement des Armées, sont remis entre les mains d'hommes d'une grande naissance, ou d'un mérite distingué. Les enfans qui doivent leur succéder un jour, & à qui l'on remettra, pour ainsi dire, le sort des États, ne sçauroient commencer de trop bonne heure, ce que l'on commence toujours trop tard, l'art de lier ses idées.

Cependant, personne n'ignore combien il est rare, que les enfans destinés aux dignités les plus importantes, apprennent les Mathématiques avant l'âge de quinze ou dix-huit ans, parce que l'on suppose toujours qu'il faut une raison très-formée pour être initié dans ces sciences. Ce préjugé est la source de deux inconvéniens très-considérables; on commence trop tard les Mathématiques, & on ne les apprend pas assez long-tems.

A quinze ou dix-huit ans, les passions sont sur le point de causer dans l'ame un grand désordre. La raison n'est pas assez fortifiée contre leurs atteintes; elle est vaincue, parce qu'elle ne connoît pas toutes ses ressources. L'esprit est alors dans le tems de la plus grande dissipation; on commence à être occupé de personnes que l'on veut s'attacher, d'une dignité, d'un établissement; mais beaucoup plus encore des agrémens que le

monde offre à cet âge, & qui pénètrent si profondément des ames toutes neuves. Nous en appellons au sens le plus commun ; est-ce bien choisir son tems que de commencer les Mathématiques à un âge si sujet à rompre le frein de la raison & de la docilité ?

Si les enfans destinés par leur naissance à commander aux autres, doivent s'appliquer aux Mathématiques dès les premières années de l'éducation, parce que ces sciences sont la base de l'art militaire & de la politique, qui est toute de calcul, nous ne voyons pas pourquoi ce Critique prononce, que *dans toute autre circonstance, l'Étude des Mathématiques commencée à vingt ans, & portée plus ou moins loin, suivant la destination des sujets, est beaucoup moins déplacée :* nous en avons déjà dit la raison ; cette étude est déplacée à vingt ans, parce qu'à cet âge on est fortement tenté de s'occuper de toute autre chose, & qu'elle ne sçauroit plus influer dans une éducation qui est totalement finie.

Cet Auteur ne nous sçaura pas mauvais gré sans doute d'observer qu'il nous donne son sentiment sans l'appuyer d'aucune raison ; ce qu'il est fort difficile de passer à un Critique de profession, qui sçait mieux que tout autre, que décider n'est pas juger. Néanmoins, il continue de nous dire : *il y a bien d'autres réformes à faire dans l'éducation, comme je le ferai voir particulièrement par l'extrait d'un excellent Livre nouveau que j'ai annoncé il y a déjà assez long-tems.*

Cet excellent Livre, dont le Critique veut parler, est le Livre de M. Morelli, qui a pour titre, *Essai sur l'Esprit humain*, ou *Principes naturels d'Éducation.* Cet Ouvrage nous paroît si estimable, que nous ne sçaurions trop con-

ſeiller à ceux qui ſont chargés d'une éducation, de ſe rendre propres les vues profondes que l'Auteur a ſi abondamment répandues dans tout ſon ſyſtême. Nous avouerons qu'après avoir lu cinq ou ſix pages de ce Livre, nous fûmes un peu honteux, ſur la parole du Critique, d'être en oppoſition avec un homme ſi capable de réfléchir. Malgré la multitude d'obſervations, dont nous avions fortifié une expérience de plus de dix années, nous nous remîmes à chercher les côtés foibles de notre opinion : cependant nous avancions dans la lecture de l'*Eſſai*, &c. lorſque nous tombâmes ſur la page 50, où M. Morelli s'explique en termes formels en faveur de notre opinion. Citons-le lui-même. *Les premières idées ſe forment par la fréquentation des objets ſenſibles, & par tout ce que les yeux peuvent préſenter à l'imagination dans l'Arithmétique, le Deſſein, la Peinture, la Géométrie pratique, &c.* . . . . . . *Pour l'Arithmétique*, il dit page 103, qu'*il s'agit de faire acquérir à un enfant l'idée de nombre par celle d'unité, qui eſt la plus ſimple que nous ayons pour cela; qu'on lui faſſe apprendre de bonne heure à compter & à calculer d'abord juſqu'à dix, puis juſqu'à vingt, & ainſi de ſuite, en lui rendant ſenſible par des jetons ou des points de dez, chaque unité, qui, jointe aux autres priſes toutes enſemble, fait le nombre qu'il nomme : il faut enſuite lui donner l'idée des ſignes qui marquent les nombres, en prenant garde qu'il ne ſépare, comme il arrive ſouvent, l'idée du ſigne, de ſa ſignification, ſi l'on n'a pas ſoin de les rapprocher. Il retiendra, par exemple, que cette figure 5 s'appelle cinq, ſans ſe ſouvenir ou faire attention qu'elle exprime cinq fois une unité; ce qui fait bien voir combien dans cet âge on eſt peu capable de lier des idées*

& de raisonner (a). *Quand un enfant sçait compter & connoître les chiffres par la figure & par la valeur, il faut l'exercer beaucoup sur le calcul, & par cœur & par écrit, jusqu'à ce que l'habitude le lui ait rendu si facile, qu'il ne reste plus qu'à lui donner dans un âge plus avancé la théorie après la pratique pour le rendre imperturbable* (b): *on sçait combien cette science est utile à tout le monde.*

Les vérités de la Géométrie élémentaire sont si simples, si naturelles & si frappantes, qu'il semble d'abord que ce soit un jeu de la raison; mais on ne tarde pas à connoître quelle est la vaste étendue de l'esprit humain, qui peut s'accoutumer à embrasser tant de choses à la fois: c'est au sensible de cette science qu'il faut d'abord appliquer un enfant, je veux dire aux figures, telles que le point, la ligne, l'angle, le triangle, le quarré, les poligones, le cercle, les plans & les solides, lui faisant remarquer sur la figure même ses principales propriétés; qu'un quarré, par exemple, a quatre côtés & quatre angles égaux: on peut, pour qu'il sente mieux la chose, les lui faire mesurer avec le compas. Lorsqu'il connoît bien les principales figures, on peut encore lui faire exécuter sur le papier tous les problêmes les plus aisés de la Géométrie, tels que les différentes élévations des perpendiculaires, l'inscription & la circonscription des figures, leurs divisions & leurs élévations; lui apprendre les différens usa-

(a) Ce n'est pas un défaut des enfans, lorsqu'ils n'attachent pas aux mots l'idée qui leur convient: celà vient de la manière vicieuse & ignorante dont on les enseigne. Ils raisonnent très-bien sur leurs petits intérêts; ce qui prouve leur capacité de lier des idées.

(b) La théorie de l'Arithmétique ordinaire est si simple, qu'elle n'excède point la capacité des enfans; j'ai éprouvé au contraire, que des enfans de sept à huit ans comprenoient les raisons d'une opération beaucoup plus vîte qu'ils ne sçavoient les réduire en pratique: c'est pourquoi on ne doit jamais séparer la théorie de la pratique; c'est un moyen plus prompt d'apprendre les Règles, & d'être moins exposé à les oublier.

ges des instrumens de Mathématiques, à construire une échelle, un plan de Fortification ou d'Architecture civile, &c.

Peut-on s'expliquer plus clairement sur les avantages & la facilité qu'il y a d'enseigner aux enfans les premiers élémens de l'Arithmétique & de la Géométrie ? Cette opinion étoit si nécessairement liée avec les principes de l'*Essai*, &c. qu'il auroit fallu l'en déduire, si l'Auteur ne l'avoit pas fait lui-même.

Nous avons donc été un peu surpris de voir censurer dans le *Discours sur l'Etude des Mathématiques*, ce que l'on paroît approuver dans l'*Essai* (*a*).

On pourroit justifier la diversité de ce jugement par la différence qui se trouveroit entre les principes de l'Essai & ceux du Discours; mais ils sont si parfaitement les mêmes, que l'on seroit tenté d'accuser l'un ou l'autre de plagiat, si l'on ne pensoit pas à cette vérité, qu'*il est bien difficile que des machines, qui ont des ressorts semblables, ne se remuent pas quelquefois de même façon.*

Pour mieux faire entrer le Public dans l'idée où nous sommes que les Mathématiques propo-

(*a*) Notre dessein a toujours été d'en agir avec l'Anonyme d'une maniere à éviter tout soupçon de fausse imputation : qu'il ne se plaigne pas que nous ayons détourné le sens de ses paroles; nous convenons qu'il n'a pas dit formellement que M. Morelli fût en opposition avec nous; mais ces paroles : *il y a bien d'autres réformes à faire dans l'éducation, comme je le ferai voir particuliérement par l'Extrait d'un excellent Livre nouveau*, signifiens bien clairement que la réforme que nous proposons, n'est pas une réforme à faire, que M. Morelli en propose bien d'autres. Tout cela insinue, ce me semble, que M. Morelli n'est pas de notre opinion, d'autant plus que l'Anonyme allegue cet estimable Auteur, à l'occasion de la censure qu'il fait de notre systême. Si pourtant cet Auteur trouvoit que nous pressons un peu trop ses paroles, au moins il faut qu'il conviennne qu'il a oublié de censurer dans l'*Essai* une opinion qui y est établie sur les mêmes principes, dont on l'a déduite dans le *Discours sur l'Etude des Mathématiques*.

ſées d'une manière convenable ſont très-acceſſibles aux enfans, & beaucoup plus propres au développement de leur raiſon naiſſante que toute autre ſcience ; nous avons comparé les élémens des Mathématiques avec ceux des Belles-Lettres.

On ne parle de rien en Géométrie dont on n'ait une idée bien palpable, une idée qui ne ſuppoſe aucune expérience ; une ligne & un angle tracés, ſont tout auſſi évidens à un enfant qu'à un homme fait. Mais quelle énorme proviſion d'idées faut-il avoir faite, pour comprendre des mots d'une abſtraction (*a*) auſſi violente que les mots d'*Ablatif*, de *Supin*, de *Gérondif*, qui ſont ſi familiers à ceux qui apprennent la Grammaire (*b*) ?

Nous allons plus loin : que l'on prenne au hazard vingt perſonnes qui compoſent une ſociété ; je les ſuppoſe toutes inſtruites du Latin ; on n'en trouvera pas peut-être une ſeule qui entende ou qui puiſſe faire entendre la valeur de ces mots : c'eſt une expérience que tout le monde peut faire comme nous.

L'induction que nous avons tirée étoit donc bien naturelle. Les Elémens des Mathématiques, où l'on entend tout, ſont plus aiſés & plus utiles aux enfans que ceux de la Grammaire, où ils n'entendent rien.

Néanmoins le Critique anonyme nous reproche *de nous laiſſer emporter un peu trop loin par notre zèle pour les Mathématiques. On ne met*, dit-il, *les Auteurs Latins entre les mains de l'enfance, ni même entre celles de la jeuneſſe, que pour les former dans*

(*a*) Il y a de l'*abſtraction* dans une idée, lorſque l'on ne ſçauroit la comprendre qu'en dégageant ſon eſprit de tout objet matériel.

(*b*) La *Grammaire* eſt une ſcience, qui contient les Règles que l'on doit ſuivre pour parler une Langue ou pour l'écrire correctement.

la belle Latinité, & l'on n'eſt pas à vingt ans plus en état qu'à ſix de les évaluer, d'en reconnoître les beautés, &c.

Il paroît que notre raiſonnement a fait quelque impreſſion, puiſque le Critique, pour en éluder la force, s'eſt jetté dans un autre embarras. Cet Ecrivain prête au Public une opinion où très-certainement ce même Public n'eſt pas. La plûpart de ceux qui font étudier leurs enfans, ſont dans une très-grande perſuaſion, que l'étude du Latin eſt un puiſſant moyen de former leur eſprit. Citons M. l'Abbé Desfontaines (*a*). A l'occaſion de ce même Diſcours, il nous décrit les effets de l'étude d'Homère, de Virgile, d'Horace, d'Ovide: qu'*y a-t-il de plus propre à former le jugement, à élever l'eſprit, à orner la mémoire, à échauffer l'imagination, à lui apprendre à inventer, à créer, à conſtruire ſes penſées, à leur donner du corps, & enfin à peindre toutes les idées avec des traits de feu & de lumière?*

Il eſt évident que cette énumération *Rhétoricienne* (*b*) ſuppoſe que les enfans ou les jeunes gens ſont capables de reconnoître les beautés des Auteurs que l'on met entre leurs mains. Car comment former ſon jugement ſur ce que l'on n'entendroit pas?

S'il n'y avoit dans la Cenſure de l'Anonyme qu'une erreur de fait, ce que nous venons de dire ſuffiroit pour être à portée de juger que les idées du Public, ſur la matière dont il s'agit, ne ſont pas tout-à-fait conformes à celles de l'Anonyme; mais il attribue au Public une idée bien plus étrange: répétons ſes paroles, *on ne met les Au-*

(*a*) Obſervations ſur les Ecrits modernes, Lettre CX. pag. 231.

(*b*) *Enumération Rhétoricienne.* C'eſt une énumération où l'on néglige les raiſons, pour ſe livrer à la pompe des mots.

teurs Latins entre les mains de l'enfance, ni même entre celles de la jeunesse, que pour les former dans la belle Latinité.

Les mots n'ont été établis que pour être le caractère des pensées; ces signes ne tirent leur beauté & leur élégance que de la grandeur & de l'harmonie des idées: une belle Latinité est toujours l'image d'une vérité frappante ou d'un sentiment exquis (*a*). L'Anonyme nous accorde que les jeunes gens ne sont pas en état de reconnoître les beautés des excellens Auteurs, & il prétend néanmoins que la lecture de ces grands modèles les forme dans la belle Latinité; nous lui serions bien obligés de nous faire comprendre ce que c'est qu'une belle Latinité vuide de sens.

Feroit-il consister tout le talent des enfans dans une grande mémoire ? Il semble qu'il ne tienne aucun compte de leur disposition à raisonner sur les objets; au moins, c'est ce que l'on peut inférer de ces paroles : *M. de la Chapelle assure que l'expérience l'a convaincu de l'aptitude des enfans à l'étude des Mathématiques : je le crois ; mais cette science a cela de commun avec les autres sciences dont on voudra leur donner des principes, dès que l'on trouvera le moyen de les mettre à leur portée.*

Cela est vrai, s'il ne s'agit que de mémoire, ils peuvent tout apprendre indifféremment; mais

(*a*) Ceux qui m'opposeroient que l'on parle très-bien à la Cour, & que l'on n'y pense pourtant pas mieux qu'ailleurs, n'auroient sur moi qu'un avantage apparent. Ce n'est pas parce que les Auteurs Latins sont de beaux parleurs, qu'on les met entre les mains de la jeunesse; ils doivent le privilège dont ils jouissent à la finesse & à la solidité de leurs idées. Nous ne manquons pas, en France, d'Auteurs qui écrivent avec pureté; mais chez nos descendans cette qualité ne sera pas la mesure de l'estime que l'on doit aux Ecrivains des siècles passés; Amiot, Montagne, Corneille & Molière seront toujours de mode. Les tours prétendus surannés de ces grands hommes seront consacrés par le génie qui les échauffe.

si l'on veût parler à leur raison naissante, pour se faire entendre à travers les enveloppes où elle est encore, nous croyons impossible de mettre à son niveau, par exemple, les principes d'une Grammaire latine, dont on ne laisse pas de surcharger leur mémoire, dès qu'ils sçavent leurs premières Lettres.

Avant que d'entamer la démonstration de cette vérité, il faut convenir que l'on n'entend point par principes d'une science les commencemens de cette science; les vrais principes ce sont les premières idées, les idées simples sur lesquelles on établit toute une doctrine. On nous accordera encore de plein droit, qu'afin d'appercevoir les principes d'une science, il est nécessaire de sentir la force des mots qui les expriment, c'est-à-dire, qu'un mot qui ne fait pas naître dans l'ame l'idée qui lui est attachée, ou ne fait rien appercevoir, ou nous plonge dans l'erreur.

Les premiers mots que la Grammaire offre aux enfans leur sont totalement inintelligibles, ils le sont même très-souvent aux hommes faits; en effet, ces mots expriment des perceptions de la plus fine Métaphysique (*a*). *Il y a deux genres*, leur dit-on, *le Masculin & le Féminin;* employez telle machine que vous voudrez, vous ne ferez jamais concevoir à un enfant de six ans ce que c'est qu'un *genre:* le *genre* n'est point un être existant dans la nature; vous ne sçauriez le lui montrer. Ce mot suppose une opération de l'ame trop fine & trop compliquée. Si vous lui dites, *il y a deux sèxes, le Masculin & le Féminin*: l'enfant ne sçait ce que c'est qu'un sèxe; vous continuez pourtant.

(*a*) La *Métaphysique* est une science dans laquelle l'esprit s'élève au-dessus des Etres corporels, & s'attache à la contemplation des choses qui ne tombent sous aucun de nos sens.

Le genre Masculin est celui qui appartient au sexe mâle, le Féminin appartient au sexe femelle. Heureusement pour le Grammairien tout cela n'est qu'un son qui ne va pas plus loin que l'oreille de l'enfant; s'il avoit assez d'expérience pour y comprendre quelque chose, il embarrasseroit fort le Donneur d'explication : une table, lui diroit-il, est du genre Féminin; elle n'est pourtant d'aucun sexe (*a*).

Les mots de la Grammaire ne présentent donc aux enfans aucune idée distincte; ils ne pourroient les évaluer qu'au moyen d'un très-grand nombre d'idées accessoires, qui sont nécessairement l'ouvrage du tems & de l'expérience.

Il n'en est pas ainsi des principes de la Géométrie : l'idée d'une chose en précède toujours le nom. Voyez-vous, dit-on à un enfant, le trait A B, A ———————— B? c'est une *ligne droite*. Son ame est pénétrée de cette idée comme la mienne; il en remarque les extrémités A, B, tout aussi-bien que moi; il ne lui faut que des yeux.

Tirons encore sous ses yeux la ligne droite C A qui rencontre la ligne A B au point A, & demandons-lui s'il n'apperçoit pas au point A une espèce de coin, une sorte d'encoignure: il n'est pas embarrassé un seul instant; je lui dis

(*a*) La constitution des Langues offre une prodigieuse bizarrerie : on ne sçauroit les en défendre qu'en s'appuyant sur cette espèce de proverbe si connu, *l'usage l'a voulu ainsi;* ce qui signifie en termes plus clairs, *les Langues sont l'ouvrage du caprice bien plus que de la raison.*

que cela s'appelle un *angle ;* la pointe A en est le *sommet*, les lignes droites C A, A B, en sont les *côtés ;* il entend tout. Je continue sur ce plan d'approvisionner son esprit de toutes les idées élémentaires, qui doivent servir à la construction du corps de doctrine que je me suis proposé.

Conçoit-on bien présentement la prodigieuse différence qu'il y a entre les principes abstraits & Métaphysiques de la Grammaire, & ceux de la Géométrie, qui se font appercevoir dès la première fois que les yeux s'ouvrent à la lumière?

Ce n'est pas tout; quand on aura entendu nos raisons, nous sommes persuadés que l'on ne nous accusera pas de témérité d'avancer, ce qui est le but principal de ce Discours, que la science des Mathématiques est la seule où les enfans puissent mettre continuellement en exercice la faculté naturelle qu'ils ont de raisonner.

L'usage est d'appliquer les enfans à la Grammaire, à la Fable (*a*), à l'Histoire de quelques faits, à quelques traits de Géographie (*b*) & de Chronologie (*c*). Il a été amplement démontré que les enfans n'entendent rien à la Grammaire. Les Dieux chimériques de la Fable, ou ses animaux qui ne le sont pas moins, sont plutôt des obstacles que des moyens de perfectionner leur raison, & il ne faut que des yeux & de la mémoire pour l'Histoire & la Chronologie (*d*).

(*a*) La *Fable* est l'histoire des opinions que les Païens avoient de leurs Divinités. La *Fable* est aussi une fiction où l'on introduit plusieurs animaux qui s'entretiennent. On leur fait dire des vérités qui peuvent servir à la correction des mœurs.

(*b*) *Géographie*, science où l'on apprend le nom & la situation des Royaumes, des Provinces, des Villes, des Mers, des Rivières, &c. que l'on rencontre sur la surface de la Terre.

(*c*) *Chronologie ;* on entend par ce mot, la connoissance des années & des jours où sont arrivés des événemens remarquables.

(*d*) C'est-à-dire, pour cette portion d'Histoire & de Chronologie qui peut être à la portée des enfans.

Toutes ces ſciences ne fourniſſent donc aucun aliment au germe qui enveloppe la raiſon des enfans. La ſcience des Mathématiques eſt la ſeule dont les principes ſoient bien palpables. Ce ſont les idées des corps qu'ils ont toujours entre les mains. Les premières conſéquences s'y tirent, pour ainſi dire, à l'œil. Ainſi la raiſon des enfans, ſollicitée par des objets dont elle ſe trouve, preſque en naiſſant, la maîtreſſe, prend plaiſir à faire l'eſſai de ſa puiſſance; mais en faire l'eſſai, c'eſt l'augmenter.

Nous oſons défier l'Anonyme de citer une autre ſcience qui puiſſe produire les mêmes moyens d'exercer la raiſon; car d'alléguer, comme il le fait ſans aucune preuve, que *les Mathématiques ont cela de commun avec toutes les autres ſciences dont on voudra leur donner des principes, dès qu'on trouvera le moyen de les mettre à leur portée*; cela n'eſt pas recevable. Dans l'empire de la lumière naturelle, la foi n'eſt due qu'aux raiſons.

Néanmoins nous ſommes perſuadés que c'eſt par une pure inadvertance que l'Anonyme a donné, ſur la fin de ſa Critique, dans le Sophiſme (*a*) que l'on appelle *ignorantia elenchi*; ignorance de ce qui eſt en queſtion.

Afin de réduire au ſilence quelques prétendus beaux eſprits, qui ſe perſuadent que l'imagination conſiſte à façonner de petites phraſes (*b*), qu'ils ont bien de la peine à terminer par une chétive penſée; nous avons bien voulu faire mention d'une

(*a*) Un *Sophiſme* eſt un raiſonnement fondé ſur un faux principe. On fait un Sophiſme quand on change, que l'on détourne, ou que l'on ne prend pas l'état de la queſtion.

(*b*) *Phraſe*. C'eſt un tour ou une manière de s'exprimer. Les Ecrivains ſuperficiels & les Diſcoureurs qui courent après le bel eſprit, ſont amoureux des *phraſes* bien cadencées.

vieille objection, qui n'a jamais été faite que par ceux qui n'entendent rien aux Mathématiques, apparemment pour se consoler de leur ignorance; ils disent donc que les Mathématiques éteignent l'imagination.

Nous n'avons produit que quelques traits de l'Histoire ancienne & moderne, & l'objection est tombée tout-à-coup; mais l'Anonyme a cru la relever en nous disant : *il prouvera sans doute que tous ces grands hommes (les Pithagores, les Platons, les Paschals, les Mallebranches, les Arnaulds, les Nicoles) avoient commencé l'étude des Mathématiques à six ans* (a), *& cela est essentiel pour son opinion : car si cette science peut éteindre l'imagination, c'est assurément dans un âge tendre où l'imagination* (b) *n'est pas encore formée.*

Développons le Sophisme : une bonne réponse est sans doute celle qui suit l'esprit de la demande ou de l'objection. Ceux qui nous ont opposé avant & après l'édition de ce Discours, que les Mathématiques étoient tout-à-fait propres à éteindre l'imagination, ne pensoient guères à celle des enfans : il auroit fallu pour cela qu'ils eussent soupçonné que ces sciences n'étoient pas au-dessus de leur portée; ce qui ne leur est jamais tombé dans l'esprit. Ainsi, quand nous avons dirigé notre réponse à ceux qui prétendent que les Mathématiques éteignent l'imagination, nous n'avons pas dû l'étendre à celle des enfans.

(a) On trouve la même inadvertance dans les Observations sur les écrits mod. Lettre citée pag. 235. *Ces grands hommes*, dit l'Auteur, *étoient-ils Géomètres à six ans.* Il y a bien de la différence entre commencer l'étude de la Géométrie, & être Géomètre. Est-on Grammairien à six ans, parce que dès cet âge on étudie la Grammaire?

(b) Rien n'est plus propre à former l'imagination que ce qui parle continuellement aux sens : telles sont les figures de la Géométrie élémentaire. La Grammaire, qui n'offre aux enfans que des mots vuides de sens, ou des idées Métaphysiques, doit en être le tombeau.

C'est aux hommes faits à qui M. l'Abbé Desfontaines en veut, lorsqu'il dit pag. 235. *La Géométrie épuise tous les efforts d'un esprit ordinaire & le rend incapable de toute autre chose : cela est certain*, continue-t-il, *par l'expérience, puisque la plupart des Géomètres n'ont ni invention, ni agrément, ni goût, que leur imagination est stérile & pesante, leur jugement même fort médiocre* (a).

Que l'Anonyme nous permette de dire quelques mots à M. l'Abbé Desfontaines. Descartes & Léibnitz, créateurs chacun de leur côté d'une Géométrie très-sublime, étoient-ils *sans imagination ?* &, pour parler de ceux que M. l'Abbé Desfontaines ne connoît pas sans doute assez, les Fontenelles, les Terrassons, les Mairans, les Fouchis,

(a) Nous sommes véritablement fâchés de voir qu'un Ecrivain, tel que M. l'Abbé Desfontaines, dont la plume correcte travaille avec succès à maintenir la pureté de notre Langue, cherche pourtant à donner de l'éloignement pour une étude à laquelle on ne sçauroit trop encourager.

Un des plus beaux esprits de notre siècle, je crois même que l'on peut dire (sans risquer l'honneur de son jugement) un des plus beaux esprits de tous les siècles, M. de Voltaire demande *quelle opinion l'on auroit d'un Avocat-Général qui se répandroit en invectives contre des Parties, au lieu d'instruire leur Procès ; la dignité de Journaliste*, ajoute-t-il, *n'est pas tout-à-fait si respectable, mais les fonctions en sont à peu près les mêmes.*

Effectivement, dit un autre Ecrivain très-accrédité, *on devroit prendre garde en écrivant à ne pas satisfaire ses passions particulières. Un Auteur a des démêlés avec un autre Auteur ; mais le Lecteur n'en a pas. Dans l'analyse d'un Discours, il s'attend qu'on va lui en exposer l'esprit, l'architecture, les principes, l'enchaînement des conséquences ; & non pas que l'on prétende d'établir des préjugés contre.* Ce seroit corrompre ceux que l'on doit instruire.

M. Bayle se plaint quelque part dans ses Lettres, de ne s'être pas assez appliqué aux Mathématiques. Ceux à qui il ne manque presque rien, sont les premiers à reconnoître qu'il leur manque beaucoup.

Hobbes, Philosophe Anglois, l'homme du monde qui pouvoit le plus légitimement se passer de Mathématiques, avoit plus de trente ans quand il réfléchit que ces connoissances lui manquoient : il fit beaucoup mieux que de les mépriser, il les étudia.

C'est par la Physique & les Mathématiques que MM. de Fontenelle & de Voltaire ont rendu la nature & tous les Arts tributaires de leur esprit, & que l'Angleterre s'est élevée à la dignité suprême, d'occuper un des premiers rangs dans l'empire des Sciences profondes.

les

les Buffon, les Maupertuis, les de Gua, les d'Alembert, les de Gamaches, les Clairaut, les le Monnier, les Réaumur, les Fontaines, les Montigni, les le Camus, les Bouguer, les Nicole, les la Condamine, les Caſſini, &c. (il faudroit nommer toute l'Académie des Sciences) ſont-ce des hommes *ſans invention & d'un jugement médiocre*, eux qui ont enlevé l'approbation générale de leur ſiècle, & par avance celle des ſiècles à venir?

Nous ne croyons pas non plus que l'on oſe attribuer au R. P. Caſtel une *imagination ſtérile & peſante* : il nous ſera permis de douter qu'aucun de nos beaux Diſcoureurs ait prodigué les images avec autant de profuſion que ce fameux Ecrivain.

Quant à l'objection de l'imagination des enfans, à laquelle on paroît prendre un ſi grand intérêt, mon premier deſſein étoit de n'y avoir aucun égard : je me fondois ſur cette idée, que l'on ne devoit conſidérer une objection que par les raiſons qui l'autoriſoient ; & comme mes critiques n'en ont apporté aucune, qu'ils me paroiſſent au contraire être dans le cas de ceux qui auroient ſeulement entendu dire que *les Mathématiques pourroient bien éteindre l'imagination*, je penſois qu'il étoit plus convenable à moi d'attendre leurs propres raiſons, que de leur en ſuppoſer de mon chef qui couruſſent les riſques de n'être pas avouées.

Néanmoins je n'ai pu réſiſter aux avis de quelques perſonnes, dont j'aime à reconnoître la ſupériorité des lumières : elles m'ont fait obſerver que pour la multitude une objection étoit une raiſon, & que l'on étoit cenſé n'avoir pas de quoi répondre, lorſque l'on ne répondoit pas.

Ainsi, en attendant que de bonnes Critiques (a) m'obligent à discuter à fond cette question, j'y vais répondre en peu de mots.

1°. On ne conseille point de ne faire étudier aux enfans que de la Géométrie. Nous avons dit nous-mêmes plus d'une fois qu'il y avoit bien autre chose à apprendre; mais que les Mathématiques devoient entrer dans la première éducation, à cause qu'elles sont fort propres à donner de la consistance à nos idées, par la méthode que l'on y suit constamment de ne parler que de ce que l'on conçoit : que l'on apprenoit en Géométrie la plus excellente de toutes les Dialectiques (b); que c'étoit la Dialectique même en œuvre; car la meilleure voie d'apprendre à raisonner, est de raisonner toujours exactement, comme l'on fait en Géométrie. De bons Tableaux valent beaucoup mieux qu'un Traité de Peinture : une action juste est fort au-dessus d'une maxime de morale; ainsi celui qui raisonne bien est très-supérieur à celui qui sçait bien raisonner.

Si l'on appliquoit les enfans uniquement à la Géométrie, on ne nie point qu'il ne puisse arriver que leur esprit resserré dans un certain cercle d'idées, ne s'y renfermât, & qu'il n'acquît une sorte d'infléxibilité qui l'empêcheroit de se tourner vers d'autres objets; comme on l'éprouve à l'égard de ceux qui, s'étant toujours amusés à la Littérature commune, de petits Vers, d'Historiettes, de jolies bagatelles, sont devenus incapables d'at-

(a) On ne doit attendre de bonnes critiques que de ceux qui auront étudié les Mathématiques & la nature de l'esprit humain en philosophes, c'est-à-dire, en remontant toujours aux premieres causes. Demander qu'au moins l'on soit instruit sur le fond de la matière que l'on traite. il me semble que ce n'est pas trop exiger : car il n'y a rien au monde de si désagréable, & qui éternise plus les discussions sans aucun fruit, que d'être obligé de répondre à des gens dont toutes les propositions sont des pétitions de principe.

(b) *Dialectique*, C'est une science qui apprend à raisonner avec justesse.

tention, & de rien produire par eux-mêmes.

2°. Mais il n'y a point d'homme qui ne soit né avec une portion d'imagination : l'art & l'étude étendent nos facultés ; elles ne les donnent pas. Entre les différentes sortes d'imaginations que la nature a distribuées aux esprits divers, qui peuvent nous intéresser, il y en a de fortes, il y en a de belles, il y en a de médiocres.

Comme nous ne voyons que les dehors de la nature, les fortes imaginations en pénétrent l'intérieur ; elles assistent, pour ainsi dire, au jeu des ressorts, dont les imaginations inférieures n'apperçoivent que l'effet.

Une belle imagination sçait parer un seul objet des beautés éparses, que la nature a répandues çà & là sur la multitude infinie de ses productions ; frappée des moindres dissonnances, elle substitue tout ce qui peut entretenir ou faire revivre l'harmonie ; elle écarte ou supprime tout ce qui pourroit l'altérer.

Pour les imaginations médiocres, elles sont vives sans chaleur ; comme elles n'ont point de tenue, elles ne font appercevoir que des étincelles dont le feu s'éteint presque en naissant ; ce sont des projets plutôt que des productions : enfin ces imaginations sont faites pour imiter, incapables de produire.

Qu'arrivera-t-il donc lorsque l'éducation offrira à notre ame différens objets? Chaque imagination s'emparera de ceux qui seront les plus conformes à sa nature, après avoir un peu essayé de tous les autres qui n'y ont pas tant de rapport.

Il n'y aura que l'imagination médiocre qui pourra être subjuguée ; ce n'est pas un grand mal. Les Mathématiques rendroient assurément un très-bon service à la Littérature, si elles substi-

tuoient à une imagination foible & stérile, un jugement exact & précis.

On ne voit donc pas quels sont les risques que l'esprit peut courir dans l'étude des Mathématiques; elles sont l'élément des fortes imaginations & le tombeau des médiocres; les belles imaginations pourront s'en passer. Nous croyons pourtant que M. de Voltaire n'en auroit pas moins fait la *Henriade*, quand il auroit commencé les Elémens d'Euclide à six ans.

Je sçais bien qu'il y a des *machines à Géométrie*, comme il y a des *échos d'esprit* & des *chaos d'érudition*. Ces sortes de gens sçavent une démonstration par cœur; mais il ne se doutent pas du génie qui a présidé à la découverte, ou de celui qui a disposé & uni les différentes parties de la démonstration. On n'est pas plus Géomètre avec ces qualités machinales, qu'avec une tête remplie de faits, on ne mérite le titre d'Historien ou de Géographe.

Il me semble que si l'on vouloit établir quelque comparaison entre les différens ordres d'esprits qui composent la République des Lettres, il faudroit se demander, Descartes vaut-il Corneille? Quelle distance y a-t-il de Léibnitz à Racine? Rousseau a t-il plus de chaleur & d'invention que Mallebranche? Bossuet est-il plus élevé que Paschal? Mais à qui comparer la sage imagination de M. de Fontenelle, *le phénix des beaux esprits de ce siècle* (*a*)?

Ceux qui auront lu la Critique que l'Anonyme a faite de notre Discours, nous rendront sans doute la justice que nous n'avons affoibli ni dissimulé aucun des points de sa Critique. On en

(*a*) Les étrangers ont accordé à M. de Fontenelle ce titre si flatteur. Voyez les Essais de Physique, par M. Muschenbrock.

peut même assez bien juger par la citation sincère & très-fidèle que nous avons faite de ses paroles, qui nous ont imposé la nécessité de traiter de nouveau toute la question. Nous le prions d'être bien persuadé que nous ne lui en sçavons point mauvais gré. Il nous a exposé simplement son opinion; elle est contraire à la nôtre; nous devions nous y attendre. On ne détruit pas du premier coup l'opinion de la multitude : c'est déjà beaucoup pour nous d'avoir réuni l'approbation de quelques sages. Le tems & la nécessité peut-être acheveront le reste.

Comme le sentiment de l'Anonyme & de M. Desfontaines est à peu près conforme à l'opinion commune, qui trouve toujours un usage assez bon par la seule raison qu'il est établi, nous avons pris un très-grand soin d'approfondir la Réponse que nous venons de faire à ces deux Critiques : par-là notre objet s'est développé. L'ombre des objections n'a fait que rendre sa lumière plus vive.

Cependant on nous a fait une objection à laquelle nous ne sçaurions répondre qu'en convenant de sa solidité. On nous a dit : il n'est pas douteux, pour peu que l'on y pense, que la Géométrie & l'Arithmétique, qui parlent presque toujours aux yeux, ne soient très propres à exercer la raison des enfans ; mais il ne faut pas attendre cet avantage de la Géométrie d'Euclide, ni même de celle de ses Commentateurs : ces derniers ont rendu la Géométrie plus facile, sans la rendre plus familière.

Rien de mieux pensé. On ne sçauroit croire combien un style ou un discours familier a de puissance pour s'insinuer dans l'ame. J'ai vu bien des gens de bons sens tout-à-fait humiliés d'une conversation à laquelle ils n'avoient rien entendu,

ils croyoient naïvement que la matière étoit trop profonde ou trop élevée pour eux : on la leur explique avec des termes simples, ordinaires, & ils sont tout étonnés de leur intelligence.

Cette considération n'a pas été infructueuse : une Géométrie faite exprès pour les enfans seroit, pour ainsi dire, le complément de notre systême : en voici une que je présente au Public. Il est naturel que celui qui expose un dessein se charge de l'exécution. L'Auteur d'une idée doit avoir plus de vues sur son objet que ceux qui n'ont pas fait profession d'y penser. Je la donne sous le nom d'*Institutions de Géométrie*, parce que cet Ouvrage contient principalement l'art d'enseigner la Géométrie aux enfans : nous avons montré dans des notes particulières les routes qui mènent à leur esprit.

Pour les inviter à faire usage de leur raison, je m'entretiens avec eux sur les premiers objets de leurs connoissances, j'essaie de leur faire sentir la commodité, le besoin ou même la curiosité qu'il y auroit de sçavoir exécuter certaines opérations ; quand ils y sont bien préparés, je leur parle de la proposition ou du problême (*a*), qui enseigne la manière de se tirer d'embarras.

Cet artifice si simple sauve à une proposition son air étranger. Elle est mieux reçue, parce que l'on en connoît la nécessité. Je tâche de traiter la Géométrie avec une simplicité de discours, & un ordre d'idées, qui ne laissent que le plaisir de l'attention sans en faire sentir le travail. Il en est en quelque façon des sciences comme des manières : mettez-y du faste, elles imposent & elles éloignent ; mais si

(*a*) Voyez n°. 42. de la Géométrie, ce que l'on entend par *Proposition* ; & n°. 3. Arithmétique, quelle idée on doit se faire de ce qu'on appelle *Problême*.

vous descendez pour vous communiquer aux plus petits, vous les trouverez beaucoup plus grands que vous n'aviez cru.

Nous avons ménagé avec le plus grand scrupule leurs foibles facultés. Lorsqu'une démonstration nous a paru trop longue, d'une nous en avons fait quatre; & comme il est difficile de se garantir de la fatigue, quand on cherche à se convaincre d'une vérité, je les livre tout-à-coup aux agréables exercices de la pratique. Ainsi une vérité qui aura coûté cinq ou six minutes d'attention, fournira deux ou trois heures d'amusement.

On supplie donc ceux qui examineront cet Ouvrage de le juger, non pas sur ce qu'ils auroient pu faire eux-mêmes, mais suivant l'esprit dans lequel il a été composé.

Plan général de cet Ouvrage.

1°. On s'est proposé de rendre la Géométrie élémentaire accessible même aux enfans. Il a fallu par conséquent se frayer de nouvelles routes. Pour cela on a fait valoir le témoignage des sens autant qu'on a pu, dans toutes les occasions où il a paru évidemment qu'il étoit légitime. Lorsque l'on a pu substituer une vérité de sentiment à la place d'une démonstration par lignes, on a préféré cette voie comme la plus lumineuse & la moins rebutante, sans négliger les démonstrations rigoureuses, afin de contenter tout le monde.

2°. On a établi un systême de proposition tel que l'on pût résoudre par son moyen les problêmes les plus utiles, les plus curieux, tous ceux enfin qui pouvoient donner le plus de goût pour la Géométrie. On a tiré ces problêmes de l'exécu-

tion des Arts les plus communs & les plus familiers, sur lesquels il n'est besoin que d'ouvrir les yeux.

3°. Comme il n'y a rien au monde de si commode, que de faire servir une vérité, dont on vient d'être convaincu, à la démonstration de celle qui la suit immédiatement; que celui qui étudie une vingtième proposition a souvent oublié la quatrième ou la huitième; toutes les propositions des trois premiers livres ont été déduites immédiatement les unes des autres (*a*). Cela n'a été exécuté par qui que ce soit, ancien ni moderne; on ne l'a pas même cru possible. Aussi chez tous les Auteurs qui ont traité de la Géométrie, la proposition qu'ils appellent la huitième, pourroit être la vingtième dans leurs livres sans aucun inconvénient; car il est fort ordinaire à ces Auteurs de n'avoir aucun besoin de la douzième proposition quand ils démontrent la treizième. L'ordre est donc renversé. Les propositions ne sont point engendrées immédiatement les unes des autres; c'est un tas de vérités, & non pas un édifice, comme nous le disons ailleurs.

4°. Cette génération de vérités, déduites immédiatement les unes des autres, nous a procuré l'avantage très-considérable d'avoir abrégé la Géométrie, sans en retrancher rien de nécessaire: où les autres emploient vingt propositions, nous n'en mettons pas quatre. Voilà une grande économie de tems, & une diminution de travail toujours très-estimable; car on a bien

(*a*) Comme l'on n'a pas besoin de toutes les propositions des trois premiers livres pour passer au quatrième, c'est-à-dire, à la mesure des solides, on ne s'est pas attaché à lier immédiatement ce livre aux précédens: mais toutes les propositions de ce quatrième livre ont été déduites immédiatement les unes des autres, suivant la loi que nous nous sommes imposée.

autre chose à apprendre que de la Géométrie.

5°. On sentira l'importance de tout ce que je dis, quand on verra que je démontre tous les problêmes de la Trigonométrie (*a*), sans avoir besoin du calcul des sinus (*b*) ni même des triangles semblables. Le moyen que j'emploie paroîtra si simple, qu'en moins de huit jours de Géométrie, on comprendra comment on peut déterminer les distances inaccessibles dans tous les cas possibles. M'étant proposé de me mettre à la portée des enfans, ce moyen m'est tombé dans l'esprit. On doit juger de sa simplicité par mon dessein. J'arrive à la résolution de ces problêmes (dont la théorie est assez difficile par les voies ordinaires) presque dès l'entrée de la Géométrie. Douze propositions m'y conduisent; encore, en chemin faisant, ai-je résolu un grand nombre de problêmes que l'on ne trouve point ailleurs. Après cela, on ne doit pas être surpris de m'entendre dire que ma Géométrie, plus étendue que beaucoup d'autres, ne renferme pourtant pas quarante propositions à la rigueur.

6°. La démonstration d'un grand nombre de problêmes étant fondée sur la vérité des propositions *converses* (*c*), je ne laisse passer aucune proposition sans en démontrer la converse, si elle en a une, & qu'elle soit vraie : ainsi j'examine les cas où les propositions ont des converses, & ceux où elles n'en ont pas. Je fais voir les converses qui sont fausses, comment on doit s'y prendre

(*a*) La *Trigonométrie* enseigne l'art de trouver les longueurs des distances inaccessibles.

(*b*) *Sinus*, *triangles semblables*; ce sont des moyens que la Trigonométrie emploie pour déterminer les distances inaccessibles.

(*c*) Consultez le n°. 44. Géomét. vous verrez ce que c'est qu'une proposition *converse*.

pour trouver la converſe d'une propoſition : toutes choſes que perſonnes n'avoit obſervées juſqu'à préſent, dont l'examen eſt néanmoins abſolument néceſſaire pour éviter tout paralogiſme.

7°. Enfin l'Ouvrage eſt accompagné de Notes ſur les développemens de l'eſprit humain, ſur la manière de ſe conduire, principalement à l'égard des enfans, afin qu'ils reçoivent des idées de la manière la plus proportionnée à leurs foibles facultés.

Si je remplis toutes ces vues, il me ſemble que cet Ouvrage ſe fera diſtinguer par un aſſez grand nombre de caractères qui méritent d'être conſidérés. Je le promets. Mes Cenſeurs décideront ſi je tiens parole.

Je diviſe cet Ouvrage en deux Parties. La première, ſous le nom d'*Inſtitutions*, renferme deux Livres ; & l'autre que j'appelle *Géométrie de l'Adoleſcence*, en contient auſſi deux. Le premier de ces Livres traite des propriétés les plus ſimples qui réſultent de la combinaiſon de lignes droites. La meſure des terreins eſt expliquée dans le ſecond. On voit au troiſième les proportions des nombres & celles des lignes ; & le quatrième renferme la meſure des ſolides. Le tout eſt terminé par la Trigonométrie rectiligne, où l'on fait uſage des Tables des Sinus & des Logarithmes, & précédé d'un Traité d'Arithmétique raiſonnée & démontrée ſous des points de vue nouveaux. La Règle de trois, de quelque nature qu'elle ſoit, y eſt démontrée beaucoup plus clairement que par les proportions : on y a joint un petit traité d'Algèbre, où l'on parle de l'extraction des racines quarrées & cubiques, comme auſſi de l'art des

équations. On retire des avantages si singuliers de cette admirable invention de l'esprit humain, que l'on doit au moins sçavoir ce que c'est. On sera bien payé du peu que cette connoissance pourra coûter.



EXPLICATION

des Signes, des Citations & des Abréviations dont on fait usage dans ces Institutions.

$+$ . . . . plus.
$-$ . . . . moins.
$\times$ . . . . multiplié par.
$\asymp$ . . . . divisé par.
$\frac{a}{b}$ ou $\frac{3}{4}$ . . . *a* divisé par *b*, ou 3 divisé par 4.
$>$ . . . . plus grand.
$<$ . . . . plus petit.
$=$ . . . . égale ou vaut.
$::$ . . . . comme.
$\because$ . . . . comme, en certains cas.
$\div$ . . . signifie comme, dans les cas où il faudroit le répéter plusieurs fois.
$\sqrt{}$ . . . . racine de.
$\sqrt{\sqrt{}}$ . . . . racine de racine.
l. 64 . . . . logarithme du nombre 64.
$2 - \overline{1 \times \frac{1}{2}}$ . . . . fait voir que l'on ne doit multiplier l'un par l'autre que les quantités ou les chiffres qui sont directement sous la ligne supérieure; ainsi -1 doit être multiplié par $\frac{1}{2}$; mais le nombre 2 ne doit pas l'être, à cause qu'il n'est pas sous la ligne supérieure.
$\overline{CD}^2$, ... signifie le quarré de la ligne *CD*.
(const.) . . . . par la construction.
(probl.) . . . . par le problême.
(supp.) . . . . par la supposition.

(prop.) . . . . par la proposition.
(n°. 15. Arith.) . . . . par le nombre 15 de
. . . . l'Arithmétique.
(n°. 20. Alg,) par le nombre 20 de l'Algèbre.
(par la Dém.) . . . . par la Démonstration.

Les nombres que l'on rencontre ainsi (n°. 38.) entre deux parenthèses, signifient que l'on doit recourir à l'article marqué par ce nombre, où l'on trouvera le fondement ou la preuve de ce que l'on avance. Quand le nombre est cité simplement comme (n°. *45*.), il signifie qu'il faut consulter le nombre noté 45 dans la matière même qu'on lit ou que l'on étudie : si l'on est à la Géométrie, cela veut dire, nombre 45 de la Géométrie ; si c'est en Algèbre, cela signifie nombre 45 de l'Algèbre, &c.

J'ai oublié d'avertir dans le Discours préliminaire, 1°. qu'après avoir montré aux enfans les quatre premières opérations de l'Arithmétique, & les quatre premières règles de l'Algèbre sur les Monômes, on doit les faire passer tout de suite au premier Livre de la Géométrie, dont les figures sont plus propres que les chiffres à fixer leur attention & à occuper leurs mains. Dans la suite on leur fera approfondir le calcul, sans lequel il ne faut pas espérer de faire aucun progrès dans les Mathématiques.

2°. Que l'on ne soit pas surpris de m'entendre parler de quelques personnes, comme existantes, qui sont mortes pendant que cet Ouvrage s'imprimoit.

3°. Que j'ai détruit les raisons sur lesquelles on fonde la méthode des indivisibles ; méthode, dont presque tous les Auteurs modernes ont fait usage, même les plus accrédités ; & qu'ainsi l'on doit avoir recours à la méthode des Anciens, appellée méthode d'exhaustion, si l'on

veut que les Elémens de Géométrie soient démontrés.

4°. Que j'ai traité de la Trigonométrie par les Sinus d'une manière qui m'est particulière. J'y ai fait remarquer que l'on pouvoit en résoudre tous les problêmes par une proposition unique.





DE L'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ORIGINE DE CETTE SCIENCE.

SES PRINCIPALES OPÉRATIONS.

L'ARITHMÉTIQUE, comme toutes les autres Sciences, est la fille du besoin & de la curiosité.

Sur le pied où sont les affaires humaines, un homme ne sçauroit se passer de traiter avec les autres hommes. Les sociétés qu'ils ont formées entr'eux, ou auxquelles ils se sont trouvés assujettis, leur ont suscité une si prodigieuse quantité de besoins, que les facultés naturelles de chaque homme ne sçauroient suffire à son bien être. Il faut qu'il ait recours aux autres hommes, & que les autres hommes recourent à lui. C'est là l'origine des échanges.

Ces échanges, qui se font à chaque instant, de-

mandent une forte de proportion, que l'esprit à la vérité découvre assez facilement dans les cas simples, mais à laquelle les plus grands efforts de mémoire ne suffisent pas, quand les combinaisons ont été multipliées à un certain point.

On a donc cherché les moyens de simplifier les cas les plus compliqués, & d'y employer le plus petit tems possible : car l'économie du tems est un gain fort considérable.

Les recherches ont produit les découvertes. On a trouvé des Règles, suivant lesquelles, sans effort d'esprit, on peut résoudre ce que le commerce offre de plus compliqué.

On a travaillé ensuite à disposer ces Règles de manière que les plus aisées servissent à l'intelligence des plus difficiles.

L'Arithmétique est donc une science, où l'on apprend à combiner les nombres ou les quantités avec facilité, & d'une manière sûre.

Il est aisé de comprendre que cette multitude de combinaisons auroit fait succomber les plus forts génies, & se seroit dérobée à la sagacité des plus subtils, si l'on avoit attaché à chaque nombre ou à chaque combinaison de nombre un signe particulier qui l'eût représenté ; car l'esprit n'appercevant pas les limites des combinaisons, n'auroit jamais fini d'en imaginer les signes.

Si l'on doit suivre l'opinion commune, c'est aux Arabes que nous sommes redevables de la petite quantité de signes que l'on emploie à représenter tous les nombres possibles ; ces signes s'appellent des *Chiffres* : il n'y en a que dix.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0.
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,	zéro.

1. On est donc convenu que le chiffre 1 représenteroit une chose toute seule, que 2 exprimeroit le double

double de 1, ainsi de suite jusqu'à 9 qui exprime neuf fois 1. Voilà la première valeur des neuf chiffres. 8 tout seul ne vaut que huit; mais étant combiné avec les autres ou avec le 0, il peut exprimer une quantité bien plus considérable Nous allons expliquer en quoi consiste cette admirable invention.

2. On a imaginé de donner une autre valeur à chaque chiffre, suivant la place qu'il occuperoit avec les autres, ou avec le 0 répété autant de fois qu'il en seroit besoin. Il a été établi qu'un chiffre mis à la seconde place, en commençant à compter de droite à gauche, vaudroit dix fois plus qu'étant posé à la première place. Ainsi pour exprimer 1 dix fois, on écrit 10; ce qui signifie qu'à la première place il n'y a rien, mais que le second chiffre 1 vaut dix fois 1 ou une dixaine. De même 20 signifie 2 fois dix ou vingt; 30, 3 fois dix ou trente; 40, 4 fois dix ou quarante; 50, 5 fois dix ou cinquante; 60, 6 fois dix ou soixante; 70, 7 fois dix ou soixante & dix, appellé quelquefois *septante*; 80, 8 fois dix ou quatre-vingt, 90, 9 fois dix ou quatre-vingt-dix que l'on nomme encore *nonante*.

Présentement entre 10 & 2 fois 10 ou vingt il y a neuf quantités qu'il faut exprimer, qui sont dix & un ou onze, dix & deux ou douze, dix & trois ou treize, dix & quatre ou quatorze, dix & cinq ou quinze, dix & six ou seize, dix & sept ou dix-sept, dix & huit ou dix-huit, dix & neuf ou dix neuf: vous écrirez donc 11 onze, 12 douze, 13 treize, 14 quatorze, 15 quinze, 16 seize, 17 dix-sept, 18 dix-huit, 19 dix-neuf.

Il y a les mêmes quantités à exprimer entre 2 fois dix & 3 fois dix, c'est-à-dire entre 20 & 30, entre 30 & 40, &c. Vous agirez donc de même que nous avons fait pour les quantités qui sont entre 10 & 20, & vous aurez l'expression des nombres depuis 1 jus-

qu'à 99, sans avoir besoin d'autres signes que les dix chiffres.

Pour continuer l'expression des nombres sans introduire de nouveaux caractères, on est encore convenu qu'un chiffre à la troisième place vaudroit dix fois plus qu'à la seconde, & ainsi de suite, en déterminant toujours qu'un chiffre mis à une place vaudroit dix fois plus qu'à la place qui le précède immédiatement en allant de la droite à la gauche. Si l'on veut donc exprimer dix dixaines qui font 99 & 1, on écrira 100, c'est-à-dire 1 à la troisième place, que l'on appelle alors un cent ou dix dixaines.

Moyennant les deux valeurs de chiffres dont nous venons de parler, & qui sont de pure convention (*a*), on peut exprimer toutes les quantités imaginables.

Cette expression a lieu de deux manières; c'est ce que l'on va démontrer en donnant la résolution des deux Problêmes suivans, après que nous aurons remarqué que dix unités valent une *dixaine* ou 10, dix dixaines valent un *cent* ou 100, dix cens valent un *mille* ou 1000, dix mille valent une *dixaine de mille* ou 10000; dix dixaines de mille valent *cent mille* ou 100000; dix cent mille valent un *million* ou 1000000; dix millions valent une *dixaine de millions* ou 10000000, dix dixaines de millions valent *cent millions* ou 100000000. Toute la suite de ces dénominations est exposée dans l'exemple suivant.

(*a*) Les gens peu accoutumés à imaginer ne sçauroient comment s'y prendre pour concevoir que l'on puisse, avec plus ou moins de chiffres que les Arabes, exprimer tous les nombres possibles. Nous sommes pourtant bien persuadés que la méthode ordinaire de compter doit toute sa considération, beaucoup plus à la coutume qu'à la simplicité dont on prétend la revêtir. Qu'il nous soit permis d'ajouter dix caractères à ceux des Arabes, la mémoire n'en sera pas plus occupée que des 20 lettres de l'alphabet, & supposant qu'un nombre à la seconde place de droite à gauche vaut vingt fois plus qu'à la premiere, à la troisième vingt fois plus qu'à la seconde, &c. on pourra par ce moyen exprimer avec quatre chiffres ce que la méthode ordinaire exprime avec cinq. Ce seroit se défier de nos Lecteurs, que d'en donner la démonstration, après tout ce que nous avons dit.

2 . . . . unités.
4 . . . . dixaines d'unités.
7 . . . . centaines d'unités.
9 . . . . unités de mille.
3 . . . . dixaines de mille.
8 . . . . centaines de mille.
6 . . . . unités de millions.
1 . . . . dixaines de millions.
2 . . . . centaines de millions.
4 . . . . unités de billions.
9 . . . . dixaines de billions.
7 . . . . centaines de billions.
3 . . . . unités de trillions.
5 . . . . dixaine de trillions, &c.

En distinguant toute la suite de ces chiffres par une virgule de trois en trois, j'appelle chaque espace qui comprend trois chiffres un *Ternaire*. Le premier est le Ternaire des unités, des dixaines, & des centaines simples, le second celui des mille, le troisième contient les millions, ce sont les billions au quatrième, les trillions au cinquième, les quatrillions au sixième, les quintillions au septième, sextillions au huitième, &c.

De sorte donc que pour énoncer avec facilité une longue suite de chiffres, il faut bien remarquer que chaque Ternaire ne contient que des unités, des dixaines & des centaines, sans autre dénomination pour celles qui sont au premier Ternaire : on ajoutera mille au second, millions au troisième, &c.

Il seroit facile maintenant d'énoncer la suite des chiffres dans l'éxemple exposé ci-dessus, si nous n'avions pas à prévenir les Commençans sur l'ordre dans lequel les chiffres s'énoncent.

Nous avons vu que les nombres croissent en al-

lant de droite à gauche; mais on les énonce, comme on lit, de gauche à droite. Supposant le nombre 456, on ne dit pas six cinquante quatre cens, mais quatre cens cinquante-six.

PROBLÊME (a).

3. *Enoncer ou exprimer par le discours une quantité donnée en chiffres.*

RÉSOLUTION (b).

Soit le nombre 6, 078, 034, dont on demande l'expression en paroles.

J'observe d'abord dans le nombre proposé deux Ternaires complets & le commencement d'un troisième; il y a donc des millions, des mille, &c. (n°. 2). C'est pourquoi, je dirai *six millions soixante & dix-huit mille trente-quatre*, sans rien prononcer sur les centaines de mille ni sur les cens simples, dont la place est occupée par un zéro.

Par la même méthode vous énoncerez ainsi la quantité suivante 3, 709, 800, 265, 403, trois trillions, sept cens neuf billions, huit cens millions, deux cens soixante & cinq mille, quatre cens trois. Où vous remarquerez qu'afin de simplifier le discours, on ne dit pas deux cens mille, soixante mille, cinq mille; mais seulement deux cens soixante-cinq mille, & ainsi des autres Ternaires.

Quoique la résolution de ce Problême paroisse d'une exécution facile à ceux qui ont l'usage du calcul, nous croyons devoir avertir les Commençans qu'ils aient l'attention de s'y exercer beaucoup:

(a) Un *Problême* est une question qu'il faut résoudre.

(b) On dit que l'on résout un Problême, quand on satisfait à la question proposée.

quand ils liront à haute voix une Histoire, un Discours, &c. ils ne se trouveront pas exposés à être arrêtés tout court, à la rencontre d'une suite de chiffres, comme il n'est que trop ordinaire; ce qui dépare la lecture, dont l'uniformité soutenue fait la principale des graces.

PROBLÊME.

4. *Rendre en chiffres une quantité exprimée par le discours.*

RÉSOLUTION.

Si l'on est souvent arrêté dans la résolution du Problême précédent, faute d'exercice, il est rare par la même raison de se garantir d'erreur dans la résolution de celui-ci. On s'y trompe presque toujours. Voici un moyen d'y procéder en toute sûreté.

Soit proposé le nombre trois cens quatre millions cent quatre, qu'il faut exprimer en chiffres. J'écris 3 pour les trois cens millions; après quoi descendant par ordre des centaines de millions aux dixaines de millions, je regarde si le discours fait mention des dixaines de millions; je n'y en vois pas, je mets donc 0 après le 3, ce qui indique qu'il n'y a point de dixaines de millions: descendant des dixaines de millions aux unités de millions, j'en trouve quatre que j'exprime par le chiffre 4, mis après le zéro en allant de gauche à droite, parce que les nombres s'énoncent dans cet ordre. Après les unités de millions viennent les centaines de mille; il n'en est pas question dans le discours, cette place sera donc remplie par un 0 mis à côté du 4: ce sera la même chose pour les dixaines de mille & les unités de mille que le discours n'énonce pas; vous mettrez donc encore deux 0 à la suite de celui que vous

venez d'écrire, & paſſant aux centaines qui viennent après les unités de mille, comme le diſcours exprime un cent, on le marquera par 1 à la ſuite des trois o : après les cens viennent les dixaines, à la place deſquelles vous mettrez un o, puiſqu'elles ne ſont pas énoncées dans le diſcours : enfin après les dixaines viennent les unités ſimples, que vous exprimerez par le chiffre 4, ainſi qu'il eſt énoncé ; de ſorte que trois cens quatre millions cent quatre s'expriment par les chiffres 304000104, ſans écrire à l'avanture, comme l'on fait fort ſouvent (*a*).

La valeur & l'expreſſion des nombres étant bien connues, il faut s'attacher à diſpoſer les chiffres dans l'ordre convenable.

PROBLÊME.

5. *Donner à pluſieurs aſſemblages de chiffres l'arrangement qui leur convient : par exemple, vous avez reçu d'une part 3064 liv., d'un autre côté, 18069 liv., & d'une troiſième part, 398 liv., que vous voudriez diſpoſer les unes ſous les autres ſelon la place qui leur eſt due.*

RÉSOLUTION.

Ecrivez d'abord la quantité qui a le plus grand nombre de chiffres, comme 18069 l., diſpoſez enſuite les deux autres ſous celle-là, enſorte que leurs unités ſoient directement ſous les unités de la pre-

(*a*) On pouvoit marquer les nombres par d'autres figures que les caractères Arabes, au lieu de dix en établir vingt ; ce qui auroit même rendu le calcul plus ſimple. Mais lorſqu'on eſt une fois convenu de la valeur de chaque chiffre, & de la manière dont ils croiſſent ſuivant la place qu'ils occupent, toutes les opérations auxquelles on pourra les ſoumettre dans la ſuite, doivent être une conſéquence néceſſaire de ces premières conventions. Cette obſervation n'a été réſumée, qu'afin que l'on s'accoutume à diſtinguer une conſéquence d'avec une ſuppoſition.

mière, les dixaines ſous les dixaines, &c. comme vous le voyez en A.

liv.		
18069		
3064	(A)	
398		

6. De quelque manière que l'on agiſſe ſur une quantité, ſur un nombre, on ne pourra que l'augmenter ou le diminuer. Cette conſidération fournit naturellement deux opérations, l'*Addition* & la *Souſtraction*.

PROBLÊME.

7. *Faire l'Addition* (*a*) *ou trouver la ſomme* (*b*) *de pluſieurs nombres propoſés, tels que ceux du Problême précédent.*

RÉSOLUTION.

Vous les diſpoſerez ainſi qu'il a été preſcrit (nº. 5.) ou comme vous le voyez en B.

liv.	
18069	
3064	(B)
398	
liv.	
21531	ſomme ou total.

Vous vous rappellerez enſuite que les unités doivent être miſes avec les unités, les dixaines avec les dixaines, les centaines avec les centaines, &c.

(*a*) *Addition :* ce mot vient du mot latin *additio*, qui ſignifie l'action d'ajouter un nombre à un autre.

(*b*) *Somme*, c'eſt la valeur totale de pluſieurs quantités réunies.

Et après avoir tiré une ligne ſous ces rangs ou *colonnes* (*a*) de chiffres, vous direz 9 & 4 ſont 13, & 8 ſont 21 unités, dans leſquelles il y a 2 dixaines & 1 unité; vous poſerez donc 1 ſous la colonne des unités, & paſſant à la colonne des dixaines, vous y porterez les dixaines que vous avez trouvées par l'addition des unités, en diſant 2 & 6 ſont 8, & 6 ſont 14, & 9 ſont 23 dixaines, qui valent 2 cens & 3 dixaines de plus; vous poſerez les 3 dixaines ſous la colonne des dixaines, pour paſſer à la colonne des cens, où vous direz 2 (cens que j'ai retenus) & 3 ſont 5 cens, (car les 0 ne donnent rien;) écrivez donc 5 ſous la colonne des cens: paſſant à la colonne des mille, vous direz 8 & 3 ſont 11 mille, où il y a 1 dixaine de mille avec un mille; poſez 1 ſous la colonne des mille; après quoi vous irez à la colonne des dixaines de mille, où vous direz 1 (dixaine de mille que j'ai retenue) & 1 ſont 2 dixaines de mille. Vous écrirez 2 ſous la colonne des dixaines de mille; & l'opération achevée donnera pour ſomme totale 21531 liv.

DÉMONSTRATION (*b*).

Les quantités ſur leſquelles on vient d'opérer ſont compoſées d'unités, de dixaines, de centaines, &c. Il ne s'agiſſoit donc que de mettre les uni-

(*a*) J'appelle *colonne horiſontale*, une ſuite de chiffres mis les uns à côté des autres; & *colonne verticale*, une ſuite de chiffres mis directement les uns ſous les autres. La ſuite des chiffres 18069 eſt une colonne horiſontale; mais la ſuite 9 eſt une colonne verticale.

8

4

(*b*) *Démonſtration*; c'eſt un diſcours par lequel on produit une preuve convaincante que l'on a dû trouver ce qui étoit cherché. On y fait voir que les conſéquences du raiſonnement ſont bien liées avec les principes évidens d'où l'on eſt parti.

tés avec les unités, les dixaines avec les dixaines, &c. mais c'est ce que l'on a exécuté dans la résolution du Problême : ainsi l'on doit avoir ce que l'on cherchoit. C. Q. F. D. (*a*).

8. Les Additions, où le Commerce nous engage, renferment presque toujours des livres, des sols, des deniers (*b*) : des toises, des pieds, des pouces, des lignes, des points : des marcs, des onces, des gros, &c.

L'écu, *monnoie*, vaut . . .	3	livres.
La livre.	20	sols.
Le sol.	12	deniers ou
. . . .	4	liards.
La toise.	6	pieds.
Le pied.	12	pouces.
Le pouce.	12	lignes.
La ligne.	12	points.
La livre *pesant*, vaut 2 marcs ou	16	onces.
Le marc.	8	onces.
L'once.	8	gros.
Le gros.	72	grains, &c.

Toutes ces divisions de mesures ont été introduites, afin de faire, avec le plus de précision possible, tous les partages auxquels le Commerce nous assujettit. Les Exemples suivans ne laisseront rien à désirer sur les Additions où ces divisions auront lieu.

(*a*) Ces quatres lettres C. Q. F. D. signifient, *ce qu'il falloit démontrer*.

(*b*) Une chose assez bizarre dans le calcul de la monnoie est l'introduction du denier, qui n'est plus une monnoie d'usage, & la suppression du liard, pièce néanmoins qui a un très-grand cours. Mais il faut que la bizarrerie de l'esprit humain exerce son empire jusques dans les choses destinées à la fixer ou même à l'anéantir.

EXEMPLE (a).

9. Où l'on voit comment on fait l'Addition de plusieurs quantités composées de livres, de sols & de deniers. Pour abréger, nous marquerons les livres par liv. les sols par f. & les deniers par den.

Trois Marchands ont fait une société où le premier a mis 9875 liv. 13 f. 9 den., le second 18094 liv. 18 f. 7 den., & le troisième 25407 liv. 5 f. 3 den. : on veut sçavoir le total de ces différentes sommes.

Disposez les chiffres ainsi que vous le voyez,

18094	liv.	18	f.	7	den.
25407	. .	5		3	
9875	. .	13	.	9	
53377	liv.	17	f.	7	den.

& tirant une ligne dessous, dites 7 & 3 font 10, & 9 font 19 deniers qui valent 1 sol 7 deniers: posez 7 sous la colonne des deniers, & passez à la colonne des sols, où vous direz 1 (sol que j'ai trouvé à la colonne des deniers) & 8 font 9, & 5 font 14, & 3 font 17; je pose 7 & je retiens 1 dixaine de sols que j'ajoute à la colonne des dixaines de sols, en disant 1 & 1 font 2, & 1 font 3 dixaines de sols qui valent 1 liv. & 1 dixaines de sols; écrivez 1 sous la colonne des dixaines de sols, & retenant 1 liv., vous l'ajouterez à la colonne suivante des unités de livres, où vous direz 1 (livre retenue) & 4 font 5, & 7 font 12, & 5 font 17; posez 7 & retenez 1 (dixaine de livres) que vous porterez à la colonne des dixaines, où vous direz 1 & 9 font 10, & 7

(a) *Exemple*, ce qui est proposé pour imiter.

ſont 17 dixaines qui valent 1 cent & 7 dixaines; poſez 7 ſous la colonne des dixaines, & retenez 1 cent pour la colonne des cens où vous paſſerez, en diſant 1 & 4 ſont 5 (o ne ſe compte point) & 8 ſont 13 cens qui valent 3 cens & 1 mille. Poſez 3 ſous la colonne des cens, & portez 1 mille à la colonne des mille, où vous direz 1 & 8 ſont 9, & 5 ſont 14, & 9 ſont 23 mille; poſez 3 mille ſous la colonne des mille, & retenez deux dixaines de mille pour la colonne des dixaines de mille, où vous direz 2 & 1 ſont 3, & 2 ſont 5; écrivez 5 ſous les dixaines de mille, & l'opération eſt finie.

EXEMPLE.

10. Où l'on voit la manière d'additionner pluſieurs quantités compoſées de toiſes, pieds, pouces, &c.

Un Entrepreneur eſt chargé de l'exécution de quatre ouvrages. Suivant l'eſtimation qu'il en a faite, le premier contiendra 9765 toiſes 2 pieds 9 pouces; le ſecond 7009 toiſes 5 pieds 10 pouces; le troiſième 878 toiſ. 4 pieds 11 pouc. & le quatrième 765 toiſ. 3 pieds 7 pouc. on demande le total de toutes ces toiſes.

Diſpoſez toutes ces quantités les unes ſous les autres, comme il eſt enſeigné au n°. 5.

toiſes	pieds	pouces.
9765	2	9
7009	5	10
878	4	11
765	3	7
18419	5	1

Après avoir tiré une ligne ſous toutes ces quan-

tités ainsi disposées, dites 9 & 10 font 19, & 11 font 30, & 7 font 37 pouces, où il y a 3 pieds & 1 pouce. Ecrivez 1, sous la colonne des pouces, & portant 3 à celle des pieds, dites 3 & 2 font 5, & 5 font 10, & 4 font 14, & 3 font 17 pieds, qui valent 2 toises & 5 pieds; marquez 5 sous la colonne des pieds, & portez 2 à la colonne des toises, où vous continuerez l'opération comme au Problême 4: vous trouverez que la somme totale est 18419 toises 5 pieds 1 pouce.

EXEMPLE.

11. Où l'on trouve la somme de différentes quantités composées de marcs, d'onces & de gros.

Outre plusieurs bijoux d'un très-grand prix, on a trouvé chez un Juif dont les effets ont été confisqués, premièrement 903 marcs 7 onces 7 gros d'argent; secondement 7658 marcs 7 onc. 3 gros; d'une troisième part 878 marcs 2 onc. 4 gros de la même monnoie. Quel est le total de ces différentes quantités.

Disposez ces trois quantités comme il est enseigné au nº. 5.

marcs	onces	gros.
7658	7	3
903	7	7
878	2	4
marcs	onces	gros.
9441	1	6

& vous commencerez l'opération par l'addition des gros, que vous continuerez jusqu'à la fin, où vous devez trouver pour total 9441 marcs 1 once 6 gros. Je ne donne ici que le résultat de cette opération, afin que les Commençans apprennent à faire usage de leurs propres lumières.

Cependant il y a encore un cas qu'il est besoin d'expliquer ; c'est lorsqu'on doit mettre o sous la colonne dont on fait l'Addition.

EXEMPLE.

	liv.
	4 8 3 2
	6 5 3
	5 9 5
	liv.
	6 0 8 0

Comptons. 2 & 3 font 5, & 5 font 10. Comme il y a une dixaine juste, je mets o sous les unités pour marquer qu'il n'y a point d'unités, & je porte 1 dixaine à la colonne des dixaines, où je dis 1 & 3 font 4, & 5 font 9, & 9 font 18 : je pose 8, & je retiens 1 cent que je porte à la colonne des cens, en disant 1 & 8 font 9, & 6 font 15, & 5 font 20 cens qui valent 2 mille exactement ; je pose donc o sous les cens ; pour faire voir qu'il n'y a pas de cens, & portant 2 mille à la colonne des mille, je dis 2 & 4 font 6 mille : j'écris 6 mille, & l'opération est finie.

On peut donc définir l'Addition, *la réunion de plusieurs quantités dont on détermine la somme.*

Pour éviter les erreurs d'inadvertance qui peuvent se glisser dans le cours du calcul (*a*), je n'ai point de meilleur avis à donner que celui de recommencer l'opération par la même méthode. Il ne faut pas que les Commençans se piquent d'expédier rapidement leurs comptes ; c'est aller assez vîte que d'aller avec sûreté.

(*a*) *Calcul* : ce mot vient du latin *calculus*, pierre, parce que les Anciens se servoient de petits cailloux pour faire leurs comptes ou supputations.

12. Il y a une autre méthode de faire l'Addition beaucoup plus simple & plus expéditive que la précédente, lorsqu'il s'agit de trouver la somme de plusieurs quantités égales, ou de prendre une même quantité un certain nombre de fois. Si l'on demandoit la somme de 329 liv. écrites 58 fois, il est évident que le calcul en seroit très-long, suivant l'opération dont nous venons de faire usage.

Mais en faisant attention à la manière dont on est convenu, que les nombres croissent par rapport à leur place, l'Addition des quantités égales se fait avec une extrême facilité. Rappellez-vous qu'un chiffre à la seconde place (en allant de droite à gauche) vaut dix fois plus qu'à la première; à la troisième place 100 fois plus qu'à la première; à la quatrième place 1000 fois plus qu'à la première, &c.

Ainsi pour rendre le nombre 9 dix fois plus grand, on écrit 90; pour le rendre 100 fois plus grand, écrivez 900. Ceci bien entendu, *on demande quelle est la somme du nombre 329 pris 58 fois.*

OPÉRATION.

$$\begin{array}{r} 329 \\ 58 \\ \hline 2632 \\ 1645 \\ \hline 19082 \\ \hline \end{array}$$

Écrivez 58 sous 329. Il est clair que le nombre 329 sera pris 58 fois, si chaque chiffre, dont ce nombre est composé, est pris 8 fois & ensuite 50 fois. Dites donc 8 fois 9 = 72; posez 2, & retez

nant 7 dixaines, vous direz 8 fois 2 dixaines font 16 dixaines, & 7 (retenues) font 23 dixaines: écrivez 3 dixaines, & retenant 2 cens, dites 8 fois 3 = 24 cens; avec 2 cens qui ont été retenus, vous aurez 26 cens qui valent 2 mille 6 cens; écrivez 6 sous les cens & avancez les 2 mille. Par cette opération le nombre 329 est pris 8 fois.

Il s'agit présentement de le prendre 50 fois. Prenons-le 5 fois; mais reculons d'une place la somme qui doit nous venir, afin qu'elle devienne encore 10 fois plus grande. Opérons: 5 fois 9 font 45; je pose 5 sous les dixaines & je retiens 4. Ensuite, 5 fois 2 font 10, & 4 font 14; posant 4 je retiens 1, après quoi je dis 5 fois 3 = 15, & 1 (que j'ai retenu) font 16; je pose 6 & j'avance 1. Par cette seconde opération le nombre 329, qui ne paroît pris que 5 fois, est réellement pris 50 fois. Premièrement 5 fois par le nombre 5 qui a donné 1645, lequel nombre est dix fois plus grand qu'il ne paroît, à cause que tous ses chiffres sont reculés d'une place. Or 10 fois 5 = 50. Tirant ensuite une ligne sous les deux résultats que l'on vient de trouver, on fera l'Addition à l'ordinaire, qui produira 19082 liv.

Lorsqu'un nombre est pris autant de fois qu'un autre nombre l'indique, cela s'appelle *multiplier*; l'opération que nous venons de faire est donc *une Multiplication*, que l'on pourroit définir une *Addition de quantités égales*. Le nombre 329 que nous avons multiplié, est appellé *multiplicande* ou *nombre à multiplier*. Le nombre 58, par lequel nous avons multiplié, est appellé *multiplicateur*. La quantité 19082 liv. qui a résulté de cette multiplication, est ce que l'on appelle *le produit*.

On a vu par l'opération, que toute la difficulté de la Multiplication consistoit à trouver sur le champ le produit d'un chiffre par un autre chiffre.

C'est pourquoi nous allons donner une Table des produits de chaque chiffre par chacun des autres chiffres, afin que les Commençans l'apprennent par cœur, ou qu'ils la consultent au besoin ; ce qui est très-utile pour calculer avec facilité.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1 fois 1 = 1	2 fois 1 = 2	3 fois 1 = 3
1 fois 2 = 2	2 fois 2 = 4	3 fois 2 = 6
1 fois 3 = 3	2 fois 3 = 6	3 fois 3 = 9
1 fois 4 = 4	2 fois 4 = 8	3 fois 4 = 12
1 fois 5 = 5	2 fois 5 = 10	3 fois 5 = 15
1 fois 6 = 6	2 fois 6 = 12	3 fois 6 = 18
1 fois 7 = 7	2 fois 7 = 14	3 fois 7 = 21
1 fois 8 = 8	2 fois 8 = 16	3 fois 8 = 24
1 fois 9 = 9	2 fois 9 = 18	3 fois 9 = 27
4 fois 1 = 4	5 fois 1 = 5	6 fois 1 = 6
4 fois 2 = 8	5 fois 2 = 10	6 fois 2 = 12
4 fois 3 = 12	5 fois 3 = 15	6 fois 3 = 18
4 fois 4 = 16	5 fois 4 = 20	6 fois 4 = 24
4 fois 5 = 20	5 fois 5 = 25	6 fois 5 = 30
4 fois 6 = 24	5 fois 6 = 30	6 fois 6 = 36
4 fois 7 = 28	5 fois 7 = 35	6 fois 7 = 42
4 fois 8 = 32	5 fois 8 = 40	6 fois 8 = 48
4 fois 9 = 36	5 fois 9 = 45	6 fois 9 = 54
7 fois 1 = 7	8 fois 1 = 8	9 fois 1 = 9
7 fois 2 = 14	8 fois 2 = 16	9 fois 2 = 18
7 fois 3 = 21	8 fois 3 = 24	9 fois 3 = 27
7 fois 4 = 28	8 fois 4 = 32	9 fois 4 = 36
7 fois 5 = 35	8 fois 5 = 40	9 fois 5 = 45
7 fois 6 = 42	8 fois 6 = 48	9 fois 6 = 54
7 fois 7 = 49	8 fois 7 = 56	9 fois 7 = 63
7 fois 8 = 56	8 fois 8 = 64	9 fois 8 = 72
7 fois 9 = 63	8 fois 9 = 72	9 fois 9 = 81

Cette

Cette Table s'explique d'elle-même; on observera seulement, que lorsque deux nombres se multiplient, l'on peut prendre lequel des deux on voudra pour multiplicande. Ainsi $3 \times 4 = 4 \times 3$. Néanmoins pour éviter le trop grand nombre des produits particuliers, il est mieux de prendre pour multiplicande celle des deux quantités qui a un plus grand nombre de chiffres, comme on va le voir dans les éxemples suivans.

Définition de la Multiplication.

13. Nous avons dit que l'on pouvoit définir la Multiplication, une *Addition de quantités égales*; mais par la manière dont on éxécute cette opération, on peut la représenter sous un autre point de vûe, & dire que la Multiplication *est une opération par laquelle on prend une quantité autant de fois qu'il est marqué par une autre.*

PROBLÊME.

14. *La hauteur d'une piramide = 369 pieds; quelle est sa hauteur en pouces?*

On sçait qu'un pied = 12 pouces. Il faut donc prendre 12 pouces 369 fois. Ainsi cette question se résout par une Multiplication.

369	multiplicande.
12	multiplicateur.
738	
369	
4428	produit.

Ecrivez donc 12 sous 369, & multipliez d'a-

bord 369 par 2, en disant 2 fois 9 sont 18; je pose 8 & je retiens 1; ensuite 2 fois 6 sont 12, & 1 sont 13; je pose 3 & je retiens 1 : continuant de dire 2 fois 3 sont 6, & 1 sont 7, j'écris 7.

Après cela nous multiplierons tous les chiffres du multiplicande 369 par le second chiffre 1 du multiplicateur : il faudra donc dire une fois 9 = 9 : posons 9 sous les dixaines, parce que 1 est une dixaine qui multiplie. Ensuite 1 fois 6 est 6, écrivez 6 sous les cens : enfin 1 fois 3 est 3, écrivons 3 en avançant; ce 3 exprime 3 mille. Tirons une ligne sous les deux produits que nous avons trouvés; faisons-en l'addition : on verra que 369 pieds contiennent 4428 pouces.

Il y a plus d'embarras lorsque le multiplicateur contient des cens, des mille, &c. car tout le multiplicande doit être multiplié successivement par chaque chiffre du multiplicateur.

EXEMPLE.

15. *Combien faudroit-il payer 359 attelages de chevaux de Turquie, à 6748 liv. l'attelage?*

On voit qu'il faut prendre 6748 liv. trois cens cinquante-neuf fois.

```
      6748
       359
   -------
     60732
    33740
   20244
   -------
   2422532 liv.
```

Ecrivez donc 359 sous 6748, & commencez par multiplier tout le nombre 6748 par 9, en di-

sant 9 fois 8 = 72; posez 2 & retenez 7, (observant généralement de retenir toujours les dixaines) ensuite 9 fois 4 sont 36, & 7 sont 43; écrivez 3 & retenez 4, puis vous direz 9 fois 7 sont 63, & 4 sont 67; écrivez 7 & retenez 6 : dites encore 9 fois 6 sont 54, & 6 sont 60; écrivez o & avancez 6. Par cette première opération le nombre 6748 est pris neuf fois. Multipliez ce même nombre 6748 par le second chiffre 5 du multiplicateur, & dites 5 fois 8 sont 40; posez o sous les dixaines & retenez 4; ensuite 5 fois 4 sont 20, & 4 sont 24: écrivez 4 & retenez 2; après cela dites 5 fois 7 sont 35, & 2 sont 37; posez 7 & retenez 3 : enfin 5 fois 6 sont 30, & 3 sont 33; écrivez 3 & avancez 3. Cette seconde opération rend le nombre 6748 cinquante fois plus grand. Il faut encore prendre ce même nombre 300 fois, c'est-à-dire, le multiplier par 3, & reculer ce produit de deux places. Dites donc 3 fois 8 sont 24; posez 4 sous les cens, & retenant 2, vous direz 3 fois 4 sont 12, & 2 sont 14; posez 4 & retenez 1. Continuez de dire 3 fois 7 sont 21, & 1 sont 22; écrivez 2 & retenez 2. Après cela 3 fois 6 sont 18, & 2 sont 20; écrivez o & avancez 2. Ce dernier produit rend le nombre 6748 trois cens fois plus grand, & par conséquent les trois opérations que nous avons faites sur ce nombre l'ont rendu 359 fois plus grand: ainsi tirant une ligne sous ces trois produits pour en faire l'addition, on trouvera que 6748, multiplié par 359, produiront 2422532 liv. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans le détail d'un plus grand nombre de cas. Voici seulement quelques exemples que l'on pourra imiter.

Un homme dépense par jour 598 liv; combien dépense-t-il par an?

L'année étant composée de 365 jours, il faudra multiplier 598 par 365.

OPÉRATION.

	598
	365
	2990
	3588
	1794
Réponse. . .	218270

Quand il y a des zéros au multiplicateur, on ne multiplie point par ces chiffres. Voyez l'exemple suivant.

On a levé une contribution sur 4008 Financiers, qui ont payé par tête 8059 liv. quel est le produit de cette contribution?

OPÉRATION.

	8059 liv.
	4008
	64472
	32236
Réponse . . .	32300472

Où vous voyez qu'après avoir multiplié 8059 par 8, on multiplie tout de suite ce même nombre par 4, parce que les zéros ne produisent rien; observant toujours de mettre le premier chiffre d'un produit sous le nombre qui multiplie.

Il y a des Multiplications d'une autre espéce nous en parlerons après avoir donné les connoissan-

ces nécessaires à l'intelligence de ces opérations.

Si vous voulez vérifier une Multiplication, ce qu'il ne faut jamais oublier, ou recommencez l'opération, ou bien du multiplicateur, faites-en le multiplicande, ainsi que nous l'avons exécuté sur le dernier exemple.

```
     4008
     8059
     ----
    36072
   20040
32064
--------
32300472
--------
```

Où l'on trouve le même produit que ci-dessus. Si cela ne se trouvoit pas, il y auroit de l'erreur; car il est évident que 8 par 4 ou 4 par 8 doivent donner 32. Jettez un coup d'œil sur la figure M, &

```
      8
  . . . . . . . .
4 . . . . . . . .  (M)
  . . . . . . . .
  . . . . . . . .
```

vous verrez que 8 points écrits 4 fois produisent précisément le même nombre que 4 points écrits 8 fois.

DE LA SOUSTRACTION.

16. Cette opération consiste à trouver la *différence* qu'il y a entre deux quantités. Pour sçavoir de combien 12 surpasse 7, on retranche, on ôte ou

l'on soustrait 7 de 12; ce qui produit 5, qui est la différence de 12 à 7, ou l'excès de 12 sur 7. 5 s'appelle aussi le *reste* à cause que l'on a coutume de s'exprimer ainsi dans la Soustraction; *de 12 ôtez 7, il reste 5.*

PROBLÊME.

17. *L'aîné d'une famille a 4897 liv. de bien, & son cadet 2534 liv.; de combien l'aîné est-il plus riche que le cadet?*

RÉSOLUTION.

Il est clair qu'il faut trouver la différence de 4897 liv. à 2534 liv., & par conséquent ôter le plus petit nombre du plus grand; car il n'est pas possible d'ôter le plus grand du plus petit. Disposez donc 2534 sous 4897, comme vous avez fait dans l'Addition, & retranchez successivement les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, comme il est expliqué par l'opération qui suit.

OPÉRATION.

```
4 8 9 7 liv.
2 5 3 4
-------
2 3 6 3    reste ou différence.
```

Commencez cette opération par les unités, & dites, de 7 ôtant 4, il reste 3: écrivez 3 sous les unités. Ensuite 3 de 9, il reste 6: on écrit 6 sous les dixaines; & continuant cette méthode, 5 de 8, il reste 3: enfin 2 de 4, il reste 2: de sorte que la différence de 4897 à 2534 est 2363. Vous direz donc que le bien de l'aîné surpasse celui de son cadet de 2363 liv.

DÉMONSTRATION.

Il est certain que l'on a la différence de deux quantités, quand on connoît la différence de chacune de leurs parties : or par l'opération vous avez la différence des parties du nombre 4897 à chaque partie correspondante du nombre 2534. La différence totale des deux nombres vous est donc connue. C. Q. F. D.

L'opération précédente est d'une extrême facilité, quand tous les chiffres du nombre supérieur sont plus grands chacun, que les chiffres correspondans du nombre inférieur : mais il arrive fort souvent que quelques chiffres du nombre supérieur sont plus petits que ceux du nombre inférieur qui leur répondent ; ce qui rendroit l'opération impossible, si l'on n'avoit pas trouvé le moyen d'éviter cet inconvénient. Nous allons montrer cet artifice dans les exemples suivans.

EXEMPLE.

Un jeune homme reçoit par an, tant pour sa subsistance que pour son entretien 2425 liv. Sa pension, ses habits & d'autres menus frais lui coutent 1978 liv., que lui reste-t-il pour ses amusemens?

On résoudra cette question en cherchant la différence du nombre 2425 liv. à 1978 liv.

OPÉRATION.

2 4 2 5 liv.
1 9 7 8

---

4 4 7 liv.

Ecrivez donc 1978 sous 2425, après quoi vous direz, 8 de 5 n'est pas une chose possible. Ajoutez 1 dixaine ou 10 à 5 pour avoir 15, & retranchant 8 de 15 il reste 7, que vous écrirez sous les unités. Passez aux dixaines; & comme vous avez augmenté le nombre supérieur d'une dixaine, au lieu de retrancher 7 dixaines vous en ôterez 8, afin de faire disparoître dans cette seconde opération ce que vous avez mis de trop dans la première: dites donc 8 de 2, cela ne se peut; mettez 1 cent ou 10 dixaines avec 2 dixaines, vous aurez 12 dixaines, d'où retranchant 8 il reste 4. Opérons sur les cens: qui de 4 cens veut ôter 10 cens; (au lieu de 9 cens que l'on retrancheroit, si l'on n'avoit pas augmenté le nombre supérieur de 1 cent) la chose n'est pas encore possible; ajoutons à 4 cens 1 mille ou 10 cens, nous aurons 14 cens, d'où retranchant 10 cens il reste 4 cens. Le nombre supérieur ayant été augmenté de 10 cens ou de 1 mille, au lieu de retrancher 1 mille nous en retrancherons 2. 2 de 2 il ne reste rien. Celui donc qui reçoit 2425 liv. pour son entretien, y compris sa nourriture, & qui n'y emploie que 1978 liv. économise 447 liv. dont il peut disposer sans apporter aucun préjudice aux arrangemens qu'il a pris. Il me semble que cette opération est suffisamment expliquée. Cependant encore quelques exemples, afin que l'on s'y exerce.

EXEMPLE.

On a donné 3204 liv. à un Tailleur, sur quoi il a fourni trois habits. Le premier est estimé 1239 liv. le second 1578 liv. le troisième 975 liv.? de combien est-on redevable au Tailleur?

Cette question exige deux opérations, l'Addition & la Soustraction: trouvez d'abord la

somme de la valeur totale des habits comme vous le voyez exécuté en B.

PREMIÈRE OPÉRATION.

1 5 7 8 liv.	
1 2 3 9	(B)
9 7 5	
3 7 9 2 liv.	

SECONDE OPÉRATION.

3 7 9 2 liv.	
3 2 0 4	(A)
5 8 8 liv.	

Cette somme 3792 liv. surpasse 3204 que l'on a payées d'abord au Tailleur : on déterminera donc par une Soustraction de combien on lui est redevable ; examinez l'opération A, vous verrez qu'on doit payer au Tailleur 588 liv. On a donc placé 3204 sous 3792, & après avoir tiré une ligne sous ces quantités, on a dit 4 de 2, cela ne se peut ; on a augmenté de 10 unités ou de 1 dixaine le nombre supérieur 2 pour avoir 12, dont retranchant 4 il reste 8. On a passé aux dixaines où il y a 0 à retrancher de 9 dixaines ; mais il faut augmenter ce 0 de 1 dixaine, afin de retrancher ce que l'on a mis de trop dans la première opération : on a donc dit, 1 de 9 il reste 8. La suite est aisée. Quand les nombres correspondans sont égaux, on écrit 0 sous le nombre où cette égalité se trouve.

pieds 9 pouces 10 lignes est la différence de la plus petite hauteur à la plus grande; en augmentant donc cette petite hauteur de cette différence, elle ne doit plus différer de la plus grande : c'est pourquoi la somme de ces deux quantités doit égaler 498 pieds 7 pouces 8 lignes, en cas que l'opération ait toute la justesse possible. Faisons l'addition. 10 & 10 font 20 lignes = 1 pouce 8 lignes; écrivez 8 sous les lignes, & retenez 1 pouce, pour dire, 1 & 9 font 10, & 9 font 19 pouces = 1 pied 7 pouces; écrivez 7 sous les pouces, & retenant 1 pied, vous direz, 1 & 9 font 10, & 8 font 18; posez 8 & retenez 1 dixaine. Ensuite 1 & 1 font 2, & 7 font 9; écrivez 9. Enfin 1 & 3 font 4; marquez 4: où vous voyez que la différence ajoutée à la plus petite quantité redonne la plus grande. Le premier calcul étoit donc exact. Autrement il y auroit de l'erreur; en ce cas, il faudroit recommencer l'opération avec un peu plus d'attention.

DE LA DIVISION.

18. On fait la Soustraction d'une maniere bien plus abrégée en plusieurs cas qui se présentent très-souvent dans le commerce de la vie. On veut sçavoir, par exemple, combien il y a de louis d'or dans 864 liv. Un louis d'or = 24 liv. ainsi en retranchant 24 de 864 autant de fois qu'il pourra y être contenu, on aura le nombre de louis d'or compris dans 864 liv. Or par la méthode de la Soustraction que nous avons expliquée, il faudroit faire 36 opérations, c'est-à-dire, retrancher 24 trente-six fois de 864; ce qui est un détail à ne pas finir. On a donc cherché une voie plus expéditive; c'est ce qui a donné naissance à la Regle d'Arithmétique nommée *Division*, à cause qu'elle sert à faire toutes

sortes de partages. Voici ce que c'est, & à quoi cette Regle se réduit. Vous voulez partager 48 liv. à 6 personnes ? Considérez que si le nombre 48 étoit simplement 6, chaque personne auroit 1 liv. s'il étoit 2 fois 6, il reviendroit 2 liv. à chacune; s'il étoit 3 fois 6, chaque personne auroit 3 liv. & ainsi de suite : par conséquent chaque personne aura autant de fois 1 que le nombre 6 est compris de fois dans 48. La question se réduit donc à chercher combien de fois le nombre auquel on fait le partage, est compris dans celui que l'on se propose de partager. Le nombre 48 que l'on veut partager est appellé *dividende*, le nombre 6 auquel on partage est appellé *diviseur*, le résultat de la Division se nomme *quotient*. Ainsi 48 liv. divisées à 6 donnent 8 liv. pour quotient : ce mot vient du latin *quoties*, combien de fois, parce qu'il exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

EXEMPLE.

Trois Personnes ont à partager également 4932 liv.; combien doit-il revenir à chacune d'elles ?

OPÉRATION.

Dividende. . .	4932 liv.	3 . . Diviseur.
	3	1644 liv. Quotient.
	19	
	18 . .	
	. 13 .	
	12	
	12	
	12	
	0 0	

Suivant ce que nous avons dit, il faut chercher combien de fois le diviseur 3 est compris dans le dividende 4932. Pour cela, disposez le dividende & le diviseur comme il est exécuté ici, en les séparant par une ligne verticale coupée par un trait horisontal, au-dessus duquel est écrit le diviseur 3, & au-dessous on voit le quotient 1644 qu'il s'agit de trouver. Observons que le dividende 4932 est composé de mille, de cens, de dixaines & d'unités simples, & qu'ainsi nous aurons partagé tous ce nombre, si nous partageons successivement les mille, les cens, &c. Commençons par les mille. (Nous dirons par la suite pourquoi il est plus avantageux de commencer cette opération par les plus grands chiffres, au lieu que les opérations précédentes ont commencé par les plus petits.) Marquez un point sous 4 mille, afin de déterminer le premier membre de votre division. Après quoi vous direz: en 4 combien de fois 3 ? on trouve 1; écrivez 1 au quotient sous la ligne horisontale. Cet 1 signifie 1 mille; car ce sont des mille que nous partageons. Pour sçavoir si 3 n'est réellement contenu qu'une fois dans 4, prenons 3 une fois, ou multiplions-le par 1, en disant: 1 fois 3 est 3; écrivons-le sous le 4 du dividende; tirons une ligne, & retranchons 3 de 4; il reste 1 mille qui ne peut plus se partager en qualité de mille à 3 personnes: descendons le 9 du dividende à côté de 1 sous la petite ligne; marquons un point sous le 9 du dividende, afin de nous rappeller que nous avons opéré sur ce nombre; alors il faut partager 19 cens à 3, & dire: en 19 combien de fois 3 ? il est clair qu'il y est contenu 6 fois; écrivez donc 6 au quotient. Multipliez comme ci-dessus le diviseur 3 par ce nouveau chiffre 6; écrivez le produit 18 sous le second membre 19 de votre division; faites la soustraction; vous avez 1

pour second reste, ce qui signifie que 3 est réellement contenu 6 fois dans 19, mais qu'il y a 1 de plus : marquez donc un point sous le 3 du dividende, descendez-le à côté du second reste 1, & directement sous lui-même pour avoir 13 dixaines à diviser à trois personnes. Dites : en 13 combien de fois 3 ? il y est 4 fois : écrivez 4 au quotient ; multipliez 3 par 4 : mettez-en le produit 12 sous 13 : faites la soustraction, il reste 1, à côté duquel vous descendrez les 2 unités du dividende sous lesquelles vous marquerez un point ; il vous reste donc 12 unités à partager à 3 personnes. Dites enfin : en 12 combien de fois 3 ? il y est 4 fois exactement ; écrivez 4 au quotient : multipliez le diviseur 3 par 4 ; écrivez le produit 12 sous 12, & faisant la soustraction on voit qu'il ne reste rien ; ce qui fait voir que le diviseur 3 est compris exactement 1644 fois dans le dividende 4932, ou, ce qui revient au même, que 3 personne auxquelles on partage 4932 liv. doivent avoir chacune 1644 liv.

On voit par cette opération qu'après avoir divisé le premier membre du dividende, chaque chiffre que l'on descend fournit un chiffre au quotient ; mais si le chiffre que l'on descend, joint au reste qui peut se trouver, est plus petit que le diviseur, on écrira 0 au quotient.

EXEMPLE.

9 Soldats ont eu l'intrépidité de pénetrer fort avant dans le pays ennemi ; après y avoir reconnu certaines dispositions, ils en ont fait le rapport à leur Général. L'avis lui a paru si important, qu'il leur a fait compter 2754 liv. ; combien doit-il revenir à chaque Soldat (a) ?

(a) Quelques personnes trouveront peut-être que les Exemples que je propose, ne sont pas assez précis ; que j'y fais entrer bien des paroles superflues. Ce n'est pas sans dessein. Les questions de

On trouvera la part de chaque Soldat, en divisant 2754 par 9.

OPÉRATION.

2754	
27	9
..54	306
54	
..	

Disposez le dividende & le diviseur comme ci-dessus; & comme il n'y a que 2 mille au dividende, vous ne pouvez pas partager 2 mille à 9 personnes; c'est pourquoi vous avancerez jusqu'au chiffre suivant 7, sous lequel vous mettrez un point; alors 27 cens détermineront le premier membre de votre division. Opérons. En 27 combien de fois 9? 3 fois exactement. Posez 3 au quotient: ce 3 signifie trois cens, parce que vous partagez des cens. Pour voir si 9 est exactement contenu 3 fois dans 27, dites: 3 fois 9 == 27; écrivez 27 sous le premier membre de la division, & retranchant 27 de 27, il ne reste rien. Partageons présentement les dixaines, si cela se peut; marquons un point sous 5, & descendons-le; mais observant que 9 n'est pas compris dans 5, cela m'indique qu'il n'y aura point de dixaines au quotient; j'écrirai donc o à côté du 3 que j'y ai déjà placé; après quoi marquant un point sous le chiffre 4 du dividende, je le descendrai directement sous lui-même à côté de 5, pour avoir 54 unité qu'il faut diviser par 9, en disant: 54

calcul que l'on nous propose à résoudre, sont toujours accompagnées des circonstances qui les occasionnent; il faut donc accoutumer les jeunes gens à mettre un discours en calcul, & à retrancher d'une question tout ce qui lui est étranger.

divisées

divisées par 9 donnent 6 ; j'écris 6 au quotient. Je multiplie le diviseur 9 par 6, il me vient 54 que j'écris sous 54 ; je fais la soustraction, & il ne me reste rien : ainsi la part de chaque Soldat sera 306 liv.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres au diviseur, l'opération devient un peu tâtonneuse ; mais c'est un tâtonnement qui a des règles.

EXEMPLE.

Un Terrein contenant 657 toises quarrées a été vendu 204984 liv. parce qu'il est situé très avantageusement ; combien est-ce la toise ?

Il est clair qu'il faut partager les 204984 liv. aux 657 toises ; ou, ce qui revient au même, qu'il faut partager 204984 en 657 parties.

OPÉRATION.

204984	657
1971	312 liv.
788	
657	
1314	
1314	
...	

Comme il y a trois chiffres au diviseur, vous en prendrez aussi trois dans le dividende : marquant donc un point sous le 4 qui exprime des mille, vous examinerez s'il est possible de partager 204 mille à 657 ; on ne le peut pas, c'est-à-dire qu'il ne peut

pas venir des mille au quotient; puisque pour avoir simplement 1 mille, il faudroit qu'il y eût au dividende 657 mille, au moins; vous poserez donc encore un point sous le 9, & le nombre 2049 cens sera le premier membre de votre division; mais il n'est pas aisé de voir tout d'un coup combien de fois le nombre 657 est compris dans 2049; c'est pourquoi vous demanderez seulement combien de fois le premier chiffre 6 du diviseur est compris dans les deux premiers chiffres 20 du dividende 2049; vous trouverez que 6 est compris 3 fois dans 20; vous poserez donc 3 au quotient. Cependant il ne suffit pas de sçavoir que 6 est compris 3 fois dans 20 pour écrire 3 au quotient; on doit examiner si tout le diviseur 657 est réellement contenu 3 fois dans le dividende 2049: multipliant donc le diviseur 657 par 3, on a 1971 que l'on pose sous le dividende 2049: on tire une ligne; on soustrait 1971 de 2049, & l'on écrit dessous le reste 78: cela indique que le diviseur 657 est réellement contenu 3 fois dans le dividende 2049, qu'il y a même 78 de plus. Abaissez donc le nombre 8 du dividende directement sous lui-même & à côté du reste 78, vous aurez 788 dixaines à diviser par 657. Le premier chiffre 7 du dividende 788 étant assez grand pour contenir le premier chiffre 6 du diviseur, dites: en 7 combien de fois 6? il y est 1 fois; écrivez 1 au quotient, & multipliez le diviseur 657 par 1; écrivez-en le produit 657 sous le dividende 788. Faites la soustraction, vous aurez un second reste 131, à côté duquel vous descendrez les 4 unités du dividende, & vous aurez 1314 unités à diviser par 657: dites donc: en 13 combien de fois 6? il y est 2 fois. Mettez 2 au quotient; & multipliez le diviseur par ce 2, il produira 1314 que l'on ôtera de 1314, il ne restera rien. 657 est donc compris 312 fois dans

104984; ou, ce qui est la même chose, chaque toise du Terrein proposé coûte 312 liv.

Les tentatives que nous avons faites dans cet exemple se sont trouvées justes au premier coup; cela n'arrive pas toujours.

EXEMPLE.

469 aunes d'une très-belle étoffe coûtent 32035 liv.; combien est-ce l'aune?

En partageant les 32035 liv. en 469 parties, on verra le prix de chaque aune.

OPÉRATION.

32035 liv.	469	
2814	68 liv. 6 f. 1 den.	83/469
3895		
3752		
143		

Les 3 chiffres du diviseur 469 n'étant pas contenus dans les 3 premiers chiffres 320 du dividende, on en prendra quatre, & l'on aura 3203 pour premier membre de la division; ainsi l'on dira : en 32 combien de fois 4? il y est justement 8 fois; mais on n'écrira pas d'abord ce nombre 8 au quotient: car en multipliant 469 par 8, le produit 3752 seroit plus grand que 3203; le diviseur 469 n'est donc pas compris 8 fois dans le premier membre de la division 3203. Supposons qu'il y soit contenu 7 fois; si nous en faisons l'essai en multipliant 469 par 7, nous trouverons le produit 3283 qui est encore

plus grand que 3203 : mais on peut écrire 6 au quotient. Multiplions donc le diviseur 469 par ce chiffre 6 ; mettons-en le produit 2814 sous 3203 ; & après avoir soustrait 2814 de 3203, il reste 389 dixaines, à côté desquelles on descendra les 5 unités du dividende, afin d'avoir 3895 unités à diviser par 469. Comme il y a au dividende 3895 un chiffre de plus qu'au diviseur 469, on demandera combien de fois le premier chiffre 4 du diviseur est contenu dans les deux premiers chiffres 38 du dividende, (ce que l'on doit observer généralement toutes les fois qu'un membre de la division a un chiffre de plus que le diviseur) ; on dira donc : en 38 combien de fois 4 ? il y est bien 9 fois ; supposant donc 9, on mutipliera le diviseur 469 par 9. Le produit 4221 étant plus grand que 3895, c'est une preuve que le diviseur 469 n'est pas compris 9 fois dans le dividende 3895 ; on écrira donc 8 au quotient, & l'on multipliera par ce nombre le diviseur 469 pour avoir le produit 3752, que l'on retranchera du dividende 3895 : il restera 143 liv. qui ne peuvent plus se diviser en cette qualité par 469. On ne doit pourtant pas négliger ce reste. C'est pourquoi, comme on sçait qu'une livre = 20 sols, 143 liv. vaudront 143 fois 20 sols.

OPÉRATION.

143
20
2860 sols.

On multipliera donc 143 liv. par 20 : le produit sera 2860 sols, que l'on continuera à diviser par

469, en prenant les 4 chiffres 2860, parce que les trois premiers chiffres ne sont pas suffisans, étant plus petits ensemble que les trois chiffres du diviseur 469. Cette nouvelle division s'exécutera ainsi que nous venons de l'enseigner très-au long, ou comme on le voit pratiqué en (B).

(B)

2 8 6 0 sols	4 6 9
2 8 1 4	6 sols
. . 4 6	

Ce qui donne 6 sols au quotient ; on écrira ces 6 sols à côté des 68 livres que l'on a déja trouvées, en séparant par un point ces deux espéces de quantités. Cette derniere division laisse 46 sols pour reste : or 1 sol == 12 deniers ; multiplez donc 46 sols par 12, vous aurez 552 deniers à diviser par 469.

OPÉRATION.

4 6		
1 2		
9 2		
4 6		
5 5 2 den.	4 6 9	8 3
4 6 9	1 den.	4 6 9
. . 8 3		

Mettez des points sous les trois chiffres 552 de votre dividende ; & dites : en 5 combien de fois 4 écrivez 1 au quotient. Multipliez 469 par 1,

écrivez-en le produit 469 sous 552. Faites la soustraction, le reste est 83 : ce nombre ne peut plus être divisé par 469 en qualité de deniers; c'est pourquoi si l'on vouloit pousser la division plus loin, on prendroit des parties de denier, qui ne sont pourtant d'aucune considération. Ainsi cette dernière division produit encore 1 denier que l'on écrira à côté de 6 sols, afin que l'on voie tout d'un coup que chaque aune d'étoffe revient à 68 liv. 6 sols 1 denier. Comme il reste encore 83 deniers à partager à 469, on écrira ce reste de cette manière $\frac{83}{469}$ à la suite de 1 denier; ce qui signifie qu'il reste encore 83 deniers à partager à 469 aunes; mais on ne pousse pas l'opération plus loin, parce que le commerce n'admet point en France de monnoies plus petites que le denier.

Il peut arriver qu'en faisant l'essai du nombre que l'on doit mettre au quotient, on trouve un reste égal au diviseur ou plus grand : on n'a pas mis alors au quotient la quantité qui convient, puisque le diviseur est contenu dans le dividende proposé plus de fois qn'on ne le suppose; on augmentera donc le quotient jusqu'à ce que le produit du diviseur par le quotient, retranché du dividende, donne un reste plus petit que le diviseur.

EXEMPLE.

On demande la trois mille huit cens quatre-vingt-dix-septième partie de 250342 liv.

Divisez 250342 par 3897,

OPÉRATION.

```
2 5 0 3 4 2  | 3897
2 3 3 8 2    |---------------------- 2031
-----------  | 64 liv. 4 s. 9 den.  ----
. 1 6 5 2 2                         3897
  1 5 5 8 8
-----------
  . . 9 3 4
        2 0
-----------
 1 8 6 8 0 sols
 1 5 5 8 8
-----------
   3 0 9 2
       1 2
-----------
   6 1 8 4
 3 0 9 2
-----------
 3 7 1 0 4 den.
 3 5 0 7 3
-----------
 . 2 0 3 1
```

Le diviseur 3897, étant plus grand que les quatre premiers chiffres 2503 du dividende, je mettrai un point sous les 4 dixaines du dividende, afin d'avoir 25034 pour premier membre de ma division. Je dirai donc, en 25 combien de fois 3 ? il y est plus de 8 fois (*a*) ; je n'écrirai pourtant pas 8 au quotient : car en multipliant 3897 par 8, le pro-

(*a*) Nous dirons plus bas pourquoi on ne peut pas mettre au quotient un nombre plus grand que celui qui exprime combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans les deux premiers chiffres du dividende.

duit 31176 seroit beaucoup plus grand que 25034; ainsi le diviseur 3897 n'est pas contenu 8 fois dans 25034; comme il en est même assez éloigné, je suppose qu'il n'y est contenu que 5 fois; je multiplie donc 3897 par 5, il me vient 19485, que je soustrais de 25034; le reste est 5549, dans lequel le diviseur 3897 est encore compris : ainsi ce diviseur est compris plus de 5 fois dans le dividende 25034. Je prends 6; & faisant l'essai, je trouve que 6 fois le diviseur 3897 = 23382. Cette quantité retranchée du membre à diviser 25034, donne pour reste 1652, qui est plus petit que le diviseur 3897. Cela me fait connoître que 6 est le nombre que je dois écrire au quotient : je l'écris; & continuant l'opération à l'ordinaire, je trouve que la trois mille huit cens quatre-vingt-dix-septième partie de 250342 liv. = 64 liv. 4 sols 9 den. $\frac{2031}{3897}$

Les opérations que l'on fait dans l'essai pour trouver le véritable quotient, doivent être faites sur un papier particulier, afin de ne pas brouiller l'opération principale.

Reprenons en peu de mots tout ce qu'il faut observer dans cette opération importante.

1°. On commence à diviser les plus grands chiffres, parce que l'on peut bien rompre ou réduire de grandes parties en petites, & non pas de petites en grandes.

2°. On doit prendre autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a dans le diviseur; & si l'on remarque que les chiffres du diviseur soient compris dans ceux du dividende, on demandera combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende : on écrira au quotient le nombre qui exprimera cette quantité, après en avoir fait l'essai.

3°. Quand les chiffres du diviseur sont plus grands

que les chiffres du dividende pris en pareil nombre, il faut prendre un chiffre de plus au dividende, & demander combien de fois le premier chiffre du diviſeur eſt compris dans les deux premiers chiffres du dividende ; & ne jamais écrire au quotient aucun chiffre ſans avoir eſſayé s'il convient.

4°. Le nombre de fois que le premier chiffre du diviſeur eſt contenu dans le premier ou dans les deux premiers chiffres du dividende, eſt le plus grand nombre que l'on puiſſe mettre au quotient. Par exemple, ayant 3999 à diviſer par 500, on doit agir ſur les quatre chiffres du dividende. Or quoique le premier chiffre 5 du diviſeur ſoit contenu plus de 7 fois dans les deux premiers chiffres 39 du dividende 3999 ; cependant, comme il n'y eſt pas tout-à-fait contenu 8 fois, on ne pourra pas mettre plus de 7 au quotient, quoique l'on ſoit obligé de conſidérer les deux chiffres ſuivans 99 : car en mettant 8 au quotient, 5 fois 8, qui valent 40 cens, ſont plus grands que 39 cens ; ils les ſurpaſſent de 1 cent, excès plus grand que 99, dont les deux premiers chiffres 39 ſont accompagnés : ainſi 5 n'étant pas contenu 8 fois dans 39, le nombre 500 ne ſera pas non-plus contenu 8 fois dans 3999. La raiſon générale en eſt, qu'en mettant au quotient un nombre plus fort que celui qui exprime combien de fois le premier chiffre du diviſeur eſt contenu dans les deux premiers chiffres du dividende, le produit du quotient par le diviſeur excédera, au moins de 1, la valeur des deux premiers chiffres du dividende : or cette unité ſuffit pour excéder tous les chiffres qui accompagnent les deux premiers chiffres du dividende, parce que tous les chiffres qui accompagnent les deux premiers chiffres du dividende, ſont toujours plus petits enſemble qu'une unité priſe de ces deux premiers chiffres, comme il eſt évident

par l'institution des nombres ; il est donc facile de ne mettre jamais au quotient un chiffre trop petit.

5°. Après avoir fait l'opération sur le premier membre de la division, on descend le chiffre du dividende qui suit immédiatement le premier membre ; ce chiffre descendu, joint au reste de la première opération, s'il y en a, ou tout seul quand il n'y a point de reste, forme le second membre de la division. La première chose que l'on doit observer, à l'égard de ce second membre & des autres suivans, c'est d'examiner si le diviseur est contenu dans les chiffres dont ce nombre est composé ; quand cela n'arrive pas, on met o au quotient, & l'on descend un autre chiffre : si le diviseur n'étoit pas encore contenu dans ce membre ainsi augmenté, on mettroit un second o au quotient, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le diviseur fût compris dans le dividende.

6°. Après que le premier membre de la division a fourni un chiffre au quotient, chaque chiffre du dividende que l'on descend, en apporte un au quotient ; ainsi l'on sçait dès le commencement de l'opération, combien il doit y avoir de chiffres au quotient.

7°. A chaque opération que l'on fait on ne sçauroit mettre plus de 9 au quotient : voici comme je le prouve. Ou le nombre à diviser contient autant de chiffres que le diviseur, ou il en contient un de plus. Si le nombre des chiffres du diviseur est égal à celui des chiffres du dividende, il n'est pas possible que ce diviseur soit contenu 10 fois dans le dividende : car, par exemple, le plus grand nombre 9999 qui a quatre chiffres, ne contient pas 10 fois 1000, qui est le plus petit des nombres à quatre chiffres. De même, s'il est nécessaire que le dividende ait un chiffre de plus que le diviseur, afin que l'on puisse exécuter une division, on ne pourra pas non plus

mettre plus de 9 au quotient : vous avez 399 à diviser par 400, cela ne se peut; 400 n'est pas contenu une fois dans 399, il s'en faut 1 que l'on ne puisse faire la division. Augmentez ce nombre d'un chiffre le plus grand qu'il soit possible; & par conséquent écrivez 3999 : à la vérité les trois premiers chiffres 399 sont devenus 10 fois plus grand par l'addition du nouveau chiffre 9; mais comme avant leur augmentation il s'en falloit 1 qu'ils ne continssent une fois 400, après être devenus dix fois plus grands, il s'en faudra 10 qu'ils ne contiennent dix fois 400. Or le nombre ajoûté n'est que 9; ainsi il s'en faut encore 1 que le nombre 400 ne soit contenu 10 fois dans 3999 : ce que les chiffres même 3999 démontrent évidemment. Par conséquent on ne doit pas mettre plus de 9 au quotient, à mesure que l'on y écrit des chiffres : car ce raisonnement est applicable à tous le cas possibles.

PROBLÊME.

19. *Vérifier la Division & la Multiplication.*

RÉSOLUTION.

Pour vérifier la division, rappellez-vous que le quotient doit exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. En prenant donc le diviseur autant de fois que le quotient l'indique, on doit retrouver le dividende, si l'expression est vraie. Vous dites que 35 divisés par 7 = 5, c'est-à-dire que 7 est contenu exactement 5 fois dans 35? Multipliez donc 5 par 7, vous retrouverez 35 : ainsi, afin d'être assuré qu'une division est exacte, on peut multiplier le quotient par le diviseur : si l'on trouve un produit égal au dividende, l'opération est bonne;

autrement, elle est fausse, on la récommencera.

Quand la division laisse un reste, on ajoûte ce reste au produit du quotient par le diviseur.

La vérification de la Multiplication est fondée sur la division. Quand vous multipliez 8 par 9, vous avez 72, qui contient 8 fois 9 : donc puisque 9 est exactement 8 fois dans 72, en divisant 72 par 9, on doit retrouver 8 ; de même 8 est 9 fois dans 72 : ainsi, en divisant 72 par 8, on doit retrouver 9.

Les nombres 8 & 9, qui concourent à former le produit 72, sont quelquefois appellés les *racines* de ce produit ; par conséquent, si l'on divise un produit par l'une de ses racines, l'autre doit venir au quotient : cela ne se trouvant pas, il y a erreur dans l'opération.

20. La division décompose donc ce que la multiplication a composé. Ces deux opérations sont contraires ; en effet, nous avons fait remarquer que l'une étoit une Addition, & l'autre une Soustraction : or il n'y a rien de plus contraire à l'Addition que la Soustraction.

21. C'est pourquoi, si l'on multiplie une quantité par un nombre, & que l'on en divise le produit par le nombre qui a multiplié, on voit renaître la quantité telle qu'elle étoit avant la multiplication. Multipliez 3 par 4, vous aurez 12. Divisez 12 par 4, vous retrouverez 3. On doit se rendre attentif à cet article.

Abrégé de la Multiplication & de la Division en certains cas.

22. En apportant un peu d'attention à la valeur des chiffes par rapport à leur place, (que l'on peut appeler *valeur locale*) on peut exécuter quelquefois avec une très-grande rapidité la Multiplication & la Division.

Vous propose-t-on de multiplier 244 par 100? écrivez 24400, en mettant deux zéros à la suite de 244, sans autre forme; car par l'institution des chiffres, une quantité que l'on recule de deux places, en allant de droite à gauche, devient 100 fois plus grande. En effet par la position des deux zéros, les unités du nombre 244 sont devenues 400, c'est-à-dire 100 fois plus grandes que 4: les autres chiffres ont augmenté à proportion de leur valeur.

Pour multiplier 244 par 1000, écrivez 244000: en un mot, ajoûtez autant de zéros au multiplicande que vous en voyez de suite au multiplicateur, pourvû que ces zéros commencent par la place des unités, & soient sans aucune interruption.

Quand le multiplicateur & le multiplicande sont terminés par une suite de zéros sans interruption, comme si l'on se proposoit de multiplier 923000 par 2400, on fait simplement la multiplication des nombres significatifs 923 par 24, & l'on ajoûte à leur produit 22152, autant de zéros qu'il y en a au multiplicateur & au multiplicande pour avoir le produit total 2215200000.

Car d'abord en multipliant 923 unités, vous avez un produit mille fois plus petit, puisque c'est 923000 qu'il faut multiplier: ainsi à cet égard on doit augmenter le produit de trois zéros, afin qu'il devienne mille fois plus grand. En second lieu, 923 n'étant multiplié que par 24, donne un produit 100 fois trop petit à raison de son multiplicateur qui est 2400, nombre 100 fois plus grand que 24. Donc par cet autre côté, le produit doit devenir encore 100 fois plus grand, & croître par conséquent de deux zéros, outre les trois zéros que le multiplicande lui a donnés.

En général, lorsque le multiplicateur est entremêlé de zéros, la multiplication ne se fait point par ces zéros.

EXEMPLE.

Il faut multiplier 24013 par 60020.

OPÉRATION.

```
      24013
      60020
   --------
     480260
  144078..
  ---------
  1441260260
```

On ne multipliera que par les chiffres ſignificatifs 2 & 6. On marquera ſeulement un point ou un zéro ſous la place de chaque zéro, comme on le voit éxécuté dans l'opération, afin que le produit des chiffres ſignificatifs occupe la place qui lui convient.

La Diviſion doit s'abréger & s'abrége en effet par une voie contraire à celle de la Multiplication. Voulez-vous diviſer 64000 par 100 ? ôtez deux zéros au dividende ; écrivez ſimplement 640 : c'eſt le quotient que vous cherchez. Car ſi une quantité devient cent fois plus grande en lui ajoutant deux zéros, c'eſt une néceſſité qu'elle devienne 100 fois plus petite en les ſupprimant ; & ſi vous diviſiez 64000 par 1000, vous ôteriez trois zéros par la même raiſon.

Lorſque le dividende n'eſt pas terminé par des zéros de ſuite, comme quand on a 34693 à diviſer par 1000, on doit toujours retrancher autant de chiffres ſignificatifs que le diviſeur a de zéros de ſuite précédés de l'unité. Ainſi on écrira au quotient 34 ; mais on doit tenir compte des chiffres

significatifs retranchés, que l'on marque ainsi $\frac{693}{1000}$ à la suite du quotient 34 : ou d'une manière plus expéditive, marquez un point après les trois premiers chiffres 693, & écrivez le diviseur 1000 sous ces trois chiffres séparés, comme vous le voyez 34. $\frac{693}{1000}$. Nous avons dit ailleurs comment l'on opéroit sur ce reste.

Quand le dividende & le diviseur sont terminés par une suite de zéros, comme si l'on avoit 24000 à diviser par 300, on supprime au dividende autant de zéros qu'il y en a au diviseur, dont on ôte aussi les zéros, & l'on fait l'opération sur les restes; ici on diviseroit simplement 240 par 3. La raison en est que 24000 sont la même chose que 240×100; & 300 reviennent à 3×100 : or en divisant 240×100 par 3×100, on voit que 100 multiplie 240, dont le produit va être divisé par le triple de 100; par conséquent le 100 doit s'anéantir de part & d'autre, puisque la Division est contraire à la Multiplication.

S'il n'y avoit qu'un zéro à la fin du dividende, tandis que le diviseur en auroit plusieurs, on supprimeroit simplement un zéro au dividende & un zéro au diviseur. Ainsi 3240 à diviser par 300 se réduiroit à 324 à diviser par 30. La raison en est claire.

Il y a bien d'autres petites adresses qui abrégent extrêmement le calcul. L'usage & l'attention à la signification des chiffres vous feront découvrir de petits sentiers; mais il faut chercher : la routine ne trouve rien. Cependant je dois vous faire connoître un abrégé de division fort commode, & qui revient très-souvent dans le commerce. C'est lorsqu'il s'agit de diviser un nombre par 20. On propose, par exemple, de déterminer combien il y a de livres dans 817035 sols. Une liv. $=$ 20 sols. La question

se réduit donc à trouver combien il y a de fois 20 sols dans 81703 5, & par conséquent à diviser ce nombre par 20, ou à en trouver la vingtième partie.

Pour comprendre l'artifice dont je vais me servir, faites attention que l'on peut avoir la vingtième partie d'une quantité, en prenant la moitié de sa dixième partie. La dixième partie de 40 est 4, dont la moitié 2 est la vingtième partie de 40.

Après avoir bien conçu que la moitié d'un dixième est un vingtième, reprenons le nombre 81703 5, & supposons que ce soient des livres; cette supposition donne un nombre de livres vingt fois trop fort; il faut donc prendre la vingtième partie de ces livres, c'est-à-dire, les diviser par 20: ainsi tous les chiffres de ce nombre doivent devenir 20 fois plus petits.

OPÉRATION.

8 1 7 0 3	5	sols
4 0 8 5 1 liv.	15	sols

Otons le dernier chiffre 5, comme il est pratiqué dans l'opération; dès-là tous les nombres 81703 deviennent dix fois plus petits, ou ne sont plus que la dixième partie de ce qu'ils étoient: prenons-en la moitié, nous en aurons la vingtième partie, puisque la moitié d'un dixième est un vingtième. Disons donc la moitié de 8 dixaines de mille est 4: je l'écris. Ensuite la moitié de 1 mille ne donne point de mille; j'écris o sous le mille: mais ce 1 mille joint avec 7 cens donne 17 cens, dont la moitié = 8 cens, & il reste 1 cent, qui étant joint avec o fait 10 dixaines, dont la moitié est 5 dixaines; j'écris 5 sous les dixaines. Enfin la moitié de 3 est 1, & il reste 1 que je joins à 5, pour avoir 15 liv. à diviser par 20, ou la vingtième partie de 15 liv. Or la vingtième partie

de

de 1 liv. est 1 sol; donc la vingtième partie de 15 livres est 15 sols: ainsi 817035 sols se réduisent à 40851 liv. 15 s. par une méthode beaucoup plus prompte que la division ordinaire par 20.

J'avertirai même en passant, que si l'on avoit à diviser un nombre par 30, on en trouveroit le quotient en coupant le dernier chiffre & prenant le tiers du reste: si on divisoit par 40, l'on en prendroit le quart; & le cinquième si c'étoit par 50, &c. observant quand il y a un reste de le mettre au-dessus d'une petite ligne horizontale sous laquelle on pose le diviseur. Pour peu que l'on veuille se donner la peine d'opérer, on en verra facilement la démonstration.

23. Toutes les méthodes de l'Arithmétique se réduisent donc à quatre; Addition, Multiplication, Soustraction, Division. Les différentes transformations auxquelles nous soumettrons les chiffres dans la suite, ne seront qu'une application de ces méthodes. Cependant on ne doit y avoir recours que quand on a quelque peine à calculer de tête. L'Art n'a été établi que pour soulager la nature: tant qu'elle peut se passer de son secours, c'est toujours le mieux. J'avertis de ceci, parce que ceux qui mettent la plume à la main pour les moindres calculs, tombent dans une paresse de génie qui n'est que trop ordinaire.

Nous n'avons point parlé de la Multiplication ni de la Division composées; ces opérations seront plus intelligibles, quand nous aurons expliqué une espèce de calcul, appellé *le calcul des fractions*; mais avant que d'y entrer, je suis bien aise de convaincre mes Lecteurs que des questions fort importantes, qui ne paroissent pas d'abord pouvoir se résoudre par les opérations que nous avons démontrées, en tirent néanmoins leur résolution.

Règle de Trois ou *de Proportion*

PROBLÊME.

24. *En douze heures un homme fait 18 lieues; combien en fera-t-il à proportion en 30 heures?*

On suppose que ce voyageur marche toujours d'un pas égal.

RÉSOLUTION.

Cette question se résout par ce que l'on appelle une *Règle de trois*, à cause que l'on y donne les trois termes 12, 18, 30. D'autres la nomment une *Règle de proportion.* Cette dénomination est plus convenable, elle renferme l'esprit de la chose; car la quantité de lieues que l'on cherche, doit être proportionnée à la durée du tems.

Vous allez voir que l'on résout cette question sans une nouvelle méthode; & qu'avec un peu de bon sens, il n'y a rien au monde de si simple. Faites ce raisonnement: si 1 heure produisoit 18 lieues, 30 heures donneroient 30 fois 18 lieues; en ce cas on multiplieroit 30 par 18, & on auroit le produit 540 lieues; mais ce n'est pas là l'état de la question: en supposant que 1 heure donne 18 lieues vous avez supposé 12 fois trop; car ce sont 12 heures qui produisent 18 lieues: ainsi le produit 540 est 12 fois trop grand; il n'y a donc qu'à le rendre 12 fois plus petit, c'est-à-dire, le diviser par 12, & le quotient 45 sera le nombre de lieues que le voyageur fera en 30 heures.

En effet, à 18 lieues en 12 heures, c'est une lieue & demie par heure; par conséquent en 30 heures on aura 30 lieues & 30 demi-lieues qui valent 15

lieues ; or 30 & 15 = 45 : ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus.

On voit donc que pour résoudre cette question & d'autres semblables, *il faut multiplier les deux derniers termes* 18 *&* 30 *l'un par l'autre, & en diviser le produit* 540 *par le premier* 12 *: le quotient de cette division donnera ce que l'on cherche.*

OPÉRATION.

12 heures. 18 lieues. 30 heures.

```
Multiplication . . . 18
                     30
                    ----
Division . . . . . 540 | 12
                   48  |----
                   --- | 45 . . nombre cherché.
                    60
                    60
                    --
                    ..
```

On résout la question suivante, en faisant le même raisonnement que ci-dessus.

QUESTION.

25 *Louis m'ont produit* 200 *livres en les commerçant ; combien m'auroient rapporté à proportion* 75 *Louis ?*

RÉSOLUTION.

OPÉRATION.

25 Louis. 200 livres. 75 Louis.

```
  200
   75
 ----
 1000
1400
 ----
15000 | 25
150   |----
      | 600
 ----
...00
```

Dites : si un Louis m'avoit produit 200 liv. 75 Louis m'auroient produit 75 fois 200 = 15000 liv. mais comme un Louis ne m'a produit que la vingt-cinquième partie de 200 livres, suivant l'état de la question, je ne dois donc prendre que la vingt-cinquième partie du produit 15000, c'est-à-dire, diviser 15000 par 25. Le quotient 600 est le gain que j'aurois fait avec 75 Louis. Cela doit être ; car 75 Louis valent trois fois plus que 25 Louis : ainsi le produit de 75 Louis doit être 3 fois plus grand que celui de 25 Louis. Or 25 Louis donnent 200 liv. donc 3 fois 25 Louis ou 75 Louis doivent produire 3 fois 200 liv. = 600 livres, comme nous l'avons trouvé.

On pouvoit résoudre les deux questions précédentes sans calcul. Nous ne les avons choisies aussi simples, que pour faire concevoir avec plus de facilité l'esprit de la Règle.

Voici encore une question semblable à la précédente.

QUESTION.

15 Hommes en un jour ont fait 25 toises d'un certain ouvrage ; combien en auroient-ils fait à proportion s'ils avoient été 37 hommes?

RÉSOLUTION.

Multipliez 25 par 37, & divisez le produit 925 par 15 ; le quotient sera 61 toises & $\frac{10}{15}$.

OPÉRATION.

15 hommes. 25 toises. 37 hommes.

```
   25
   37
  ---
  175
  75
  ---
  925 | 15
  90  | 61 toises.      10
  ---                   --
  .25                   15
  15
  ---
  10
```

Voulez-vous sçavoir la valeur de $\frac{10}{15}$? Rappellez-vous que cela signifie 10 toises à diviser par 15, cela ne se peut. Réduisez les dix toises en pieds. 1 toise = 6 pieds ; ainsi dix toises = dix fois 6 pieds = 60 pieds qu'il faut diviser par 15, cela donne 4 pieds ; par conséquent 37 ouvriers auroient fait 61 toises 4 pieds d'ouvrage.

25. On pourroit considérer la Régle de trois ou de proportion sous un autre point de vue qui n'est pas moins lumineux que le précédent, & qui est peut-être plus naturel, parce que l'on n'est pas obligé de supposer ce qui n'est point.

EXEMPLE.

Un Jet fournit en 8 jours 96 muids d'eau ; combien en fournira-t-il en 29 jours ?

RÉSOLUTION.

Puisque ce jet fournit 96 muids en 8 jours, il n'en fournira que la huitième partie en un jour. Divisez donc 96 par 8. Le quotient 12 indiquera que ce jet fournit par jour 12 muids d'eau; par conséquent en 29 jours il en fournira 12 fois 29 = 348, nombre cherché.

OPERATION.

8 jours. 96 muids. 29 jours.

```
Division . . . . 96 | 8
                  8 |----
                 -- | 12
                 16
                 16
                 --
                  .
                 --
Multiplication .. 12
                  29
                 ---
                 108
                 24
                 ---
                 348 muids. Nombre cherché.
```

La Règle eſt donc, ſuivant notre raiſonnement, *de diviſer le ſecond terme par le premier, & d'en multiplier le quotient par le troiſième terme : le produit qui en réſultera, ſera le terme cherché.*

Réſolvez ce même éxemple par la première méthode que nous avons démontrée (n°. 24.), vous trouverez le même produit 348.

26. Il y a un grand nombre de Règles de trois qui renferment cinq termes ; mais il eſt facile de les réduire à trois, & de les réſoudre par conſéquent, en tenant la même conduite que ci-deſſus.

EXEMPLE.

Je fais travailler à un ouvrage. 25 Ouvriers que j'y emploie m'ont coûté en 8 jours 300 liv. combien faudroit-il que je payaſſe à 30 Ouvriers, qui y travailleroient 15 jours ?

J'appelle *une journée*, le travail d'un homme pendant un jour ; ainſi 25 Ouvriers par jour me donnent 25 journées : donc en 8 jours ils produiront 25 fois 8 journées = 200 journées. Les deux premiers termes 25 & 8, ſont réduits au ſeul terme 200. Par la même raiſon 30 Ouvriers en 15 jours produiront 15 fois 30 journées = 450 journées.

Voilà donc la queſtion réduite à ces trois termes, 200 *journées ont été payées* 300 *livres, combien faudra-t il payer* 450 *journées ?* Multipliez donc les deux derniers termes 300, 450 l'un par l'autre, & diviſez le produit 135000 par le premier terme 200 : le quotient 675 liv. exprimera ce que je dois payer (n. 24.).

OPÉRATION.

25 Ouvriers. 8 jours. 300 liv. 30 Ouvriers. 15 jours.
1[ere] Réduction. 25 × 8 = 200.
2[e] Réduction. 30 × 15 = 450.

Question réduite : 200 journées. 300 liv. 450 journées.

Multiplication . . . 450
300
———
Division . . . . . 135000 | 200
———
675 nombre cherché.

Où vous voyez que l'on multiplie les deux derniers termes 300, 450 de la question réduite l'un par l'autre, & que l'on en divise le produit 135000 par le premier 200, comme on l'a exécuté précisément dans les questions à trois termes.

Autre Exemple semblable au précédent.

400 *liv. en* 6 *mois ont produit* 48 *liv. combien produiront à proportion* 500 *liv. en* 8 *mois ?*

RÉSOLUTION.

Considérez que 400 l. qui travaillent pendant 6 mois, produisent le même fruit que 6 fois 400 liv. pendant un mois ; car si vous faites agir 6 fois plus d'argent, d'un autre côté vous êtes 6 fois plus foible par le tems ; il y a compensation. A la place de 400 liv. en six mois, on peut donc substituer 6 fois 400 liv. ou 2400 liv. en un mois. De même au lieu de 500 liv. en 8 mois, vous pouvez prendre 8 fois 500 liv. ou 4000 liv. en un mois, & réduire par conséquent la question aux termes suivans : 2400 l. *produisent 48 liv. combien doivent rapporter à proportion* 4000 *liv. dans le même tems ?* En multipliant

les deux derniers termes 48, 4000 l'un par l'autre, & divisant leur produit 192000 par le premier terme 2400, le quotient 80 fera voir que 500 liv. en 8 mois rapporteront 80 liv. en suivant l'état de la question.

OPERATION.

400 liv. *6* mois. 48 liv. 500 liv. 8 mois.

1[ere] Réduction. 400 × *6* = 2400 liv.

2[e] Réduction. 500 × 8 = 4000 liv.

Question réduite : 2400 liv. 48. liv. 4000 liv.

Multiplication . . 4000
48

Division . . . 192000 | 2400
19200 | 80 l. nombre cherché.
. 0

Ce qui revient, comme vous voyez, aux cas les plus simples.

27. Mais quelquefois ces sortes de questions sont proposées de manière qu'il faut multiplier les deux premiers termes, & diviser par le troisième; c'est le bon sens qui décide.

EXEMPLE.

300 *Soldats en 12 jours doivent consommer une certaine quantité de Vivres ; en combien de tems 200 Soldats feront-ils la même consommation ?*

RÉSOLUTION.

Ce qu'un Soldat consomme en un jour, je l'appelle une *Ration*. Il y a 300 Soldats ; donc c'est par jour 300 Rations. La provision est supposée durer 12 jours ; on a donc 12 fois 300

= 3600 Rations qui épuisent la provision ; mais d'un autre côté, vous n'avez que 200 Soldats, qui ne produisent par jour que 200 Rations : il s'agit donc de trouver un nombre, lequel, multipliant 200, produise 3600 ; or en divisant 3600 par 200, on trouvera le nombre 18, qui fera voir que 200 hommes en 18 jours feront la même consommation que 300 hommes en 12 jours : car 18 par 200 (c'est-à-dire le produit du quotient par le diviseur) donnent 3600 ; nombre des Rations nécessaires pour faire la consommation proposée.

Démontrons cette opération en d'autres termes. Puisqu'il faut livrer 3600 Rations pour consommer la provision, & que vous n'avez que 200 Soldats, c'est-à-dire, 200 Rations livrées par jour ; afin d'épuiser ces Vivres vous aurez besoin d'autant de jours que le nombre 200 est compris de fois dans 3600 ; & par conséquent vous diviserez le produit 3600 des deux premiers termes 300, 12, par le troisième terme 200, ainsi que nous l'avons éxécuté.

Quand on remarquera qu'il s'agit de produire le même effet, comme est ici la consommation d'une même quantité de Vivres, *on multipliera les deux premiers termes de la question l'un par l'autre ; & l'on en divisera le produit par le troisième :* cette Règle est générale, & s'appelle *Règle inverse.*

Toutes ces questions se résolvent sans aucune Règle nouvelle ; avec la Multiplication & la Division, appliquées à propos, on en viendra à bout. Je vais proposer encore quelques éxemples, afin que l'on s'accoutume à raisonner.

EXEMPLE.

En 50 jours 15 Maçons construisent une maison ;

en combien de jours 25 Maçons la construiroient-ils?

RÉSOLUTION.

15 Maçons font par jour 15 journées de travail: ils travaillent 50 jours; c'est donc 15 fois 50 journées=750 journées employées à la construction de la maison. Mais par la supposition, il y a d'un autre côté 25 Maçons qui produisent 25 journées de travail par jour: examinez donc combien de fois 25 est compris dans 750: en divisant 750 par 25, le quotient 30 fera connoître que 25 Maçons en 30 jours feront le même ouvrage que 15 Maçons en 50; puisque de part & d'autre il y aura autant de journées, c'est-à-dire, 750 journées de travail.

Il n'y a pas plus de difficulté quand ces questions renferment cinq termes.

EXEMPLE.

Une provision suffit pour faire subsister 40 hommes pendant 50 jours, en leur donnant 30 onces par jour: à combien devroit-on réduire ces onces par jour, s'il falloit faire subsister 90 hommes pendant 70 jours avec la même provision?

RÉSOLUTION.

Faites toujours ce raisonnement: 40 hommes pendant 50 jours font 40 fois 50 journées=2000 journées. Chaque journée exige 30 onces; c'est donc 30 fois 2000=60000 onces, en quoi consiste toute la provision qu'il faut distribuer à 90 hommes pendant 70 jours, c'est-à-dire, à 70 fois 90 journées=6300 journées: divisez donc 60000 par 6300, le quotient 9 & $\frac{3300}{6300}$ marquera que pour faire subsister 90 hommes pendant 70 jours, suivant l'état de la question proposée, on ne doit distribuer par jour à chaque homme que 9 onces & demie à peu près; car

la quantité $\frac{3300}{6300}$ abrégée, donne $\frac{33}{63}$ (n°. 22.) c'est-à-dire 33 onces qu'il faut partager en 63 parties, c'est un peu plus de la moitié d'une once.

OPERATION.

40 hommes. 50 jours. 30 onces. 90 hom. 70 jours.
1[ere] Réduction. $40 \times 50 \times 30 = 60000$.
2[e] Réduction. $90 \times 70 = 6300$.

Question réduite : 60000 onces. 6300 journées.

Division .. 60000 | 6300
56700 | $9 \frac{3300}{6300}$ ou $\frac{33}{63}$ nombre cherché.
3300 |

Où vous voyez qu'il faut multiplier les trois premiers termes 40, 50, 30 les uns par les autres, & en diviser le produit 60000 par celui des deux derniers $90 \times 70 = 6300$, pour trouver dans le quotient de cette division le nombre 9 & $\frac{33}{63}$.

28. Moyennant la Règle de proportion, on fait toutes sortes de *changes étrangers*. La science des changes étrangers consiste à trouver le raport des poids ou des mesures d'un pays avec celles d'un autre.

EXEMPLE.

200 *lib. de Venise pèsent 140 lib. de Lyon; combien 500 lib. de Venise pèsent-elles de lib. de Lyon?* *

Il est clair que cette question se résout par une Règle de trois; ainsi multipliant les deux derniers termes, ou 140 par 500, & divisant le produit 70000 par le premier terme 200, le quotient 350 vous indiquera que 500 liv. de Venise pèsent 350 de Lyon (n°. 24.).

* La Livre pesant est exprimée par le signe lib.

Autre Exemple semblable au précédent.

21 Aunes de Paris font 27 verges de Londres; combien 35 Aunes de Paris feront-elles de verges de Londres?

RÉSOLUTION.

Dites: puisque 21 aunes de Paris produisent 27 verges de Londres, combien 35 aunes de Paris en produiront-elles? La Règle de trois est simple. Multipliez donc les deux derniers termes 27, 35 l'un par l'autre; divisez-en le produit 945 par le premier terme 21 (nº. 24), le quotient 45 vous fera voir que 35 aunes de Paris font 45 verges de Londres.

Troisième Exemple de changes étrangers

60 sols de France valent 80 deniers de Hollande; combien 650 deniers de Hollande font-ils de sols de France?

RÉSOLUTION.

Disposez les termes de cet exemple comme ils doivent être, en disant: puisque 80 *deniers de Hollande valent* 60 *sols de France, combien* 650 *deniers de Hollande valent-ils de sols de France?* On voit encore que la Règle de trois est simple: ainsi on multipliera les deux derniers termes 60, 650 l'un par l'autre; & l'on en divisera le produit 39000 par le premier terme 80. Le quotient 487 & $\frac{4}{8}$ fera connoître que 650 deniers de Hollande se réduisent à 487 sols $\frac{4}{8}$ ou à 487 sols & demi de France; car 4 divisés par 8 donnent une moitié de sol.

Règle de Compagnie ou de Société.

39. Ceux qui sont dans le Commerce ou dans la Finance, forment souvent des sociétés où chacun contribue, ainsi qu'il est convenu entr'eux. Le gain

ou la perte doit donc être proportionnée aux mises particulières. Celui qui a fourni trois fois plus, doit perdre ou gagner trois fois davantage, en supposant que le tems soit égal de part & d'autre : on sent déja par la simple exposition que les questions de cette nature doivent se résoudre par la Règle de proportion.

EXEMPLE.

Trois Marchands s'associent & composent un fonds de 30000 liv. avec lesquelles ils gagnent 12000 liv. le premier met 15000 l. le second 9000 l. & le troisième 6000 l. combien chacun doit-il avoir pour sa part?

Chaque Marchand doit assurément retirer à proportion de l'argent qu'il a mis dans la Société. Vous ferez donc autant de Règles de trois qu'il y a de Marchands; ainsi vous direz : puisque 30000 liv. gagnent 12000 liv. combien 15000 liv. doivent-elles gagner ? Vous trouverez 6000 liv. pour la part du premier.

Après cela vous chercherez ce qui doit revenir au second, en disant toujours : 30000 liv. donnent 12000 liv. combien 9000 liv. doivent-elles donner ? Elles produiront 3600 liv. au second associé.

Enfin vous raisonnerez de même par rapport au troisième associé. 30000 liv. rapportent 12000 liv. combien 6000 liv. rapporteront-elles ? C'est 2400 liv. qu'il reviendra au troisième associé.

Je ne fais pas ce calcul : ce seroit une diffusion inutile après tout ce que j'ai dit & fait dans les exemples précédens ; il suffit d'indiquer la voie. Dans le Chapitre suivant, où le calcul va devenir un peu plus compliqué, je ferai encore usage de la Règle de trois, afin que l'on soit bien convaincu qu'il n'y a presque point de problême arithmétique que l'on ne puisse résoudre par la Multiplication & la Division.



CHAPITRE II.

DES FRACTIONS.

30. Les nombres sur lesquels nous avons opéré dans le chapitre précédent, sont appellés *nombres entiers*, parce qu'ils contiennent 1 entièrement ou plusieurs fois 1; mais on peut demander ou l'on peut avoir besoin du quart de 1, du cinquième de 1, du septième de 1, &c. le septième d'une toise ou le cinquième d'un écu sont des quantités très-réelles.

Quand on divise une quantité en plusieurs parties égales, une ou plusieurs de ces parties s'appellent des *fractions* de cette quantité. Divisez 1 toise en 8 parties égales, chaque partie est une fraction de la toise, & s'appelle un huitième de toise, qui s'exprime ainsi $\frac{1}{8}$: cela signifie que la toise est divisée en huit parties égales dont on en prend une. Le nombre 8, qui est au-dessous de la petite ligne horisontale, est appellé *dénominateur*, à cause qu'il donne le nom à la fraction; il dit qu'elle exprime des huitièmes. On appelle *numérateur* le nombre supérieur 1; ce chiffre compte réellement les parties que l'on prend. De même cette expression $\frac{4}{5}$ d'un pied, signifie que le pied est divisé en cinq parties dont on en prend quatre; $\frac{9}{16}$ d'aune font comprendre que l'aune est divisée en seize parties dont on prend neuf, & l'on s'énonce ainsi dans le discours par rapport à ces quantités: on dit *quatre cinquièmes d'un pied, neuf seizièmes d'aune*, &c.

31. Puisque les fractions sont des quantités réelles, elles sont soumises aux mêmes combinaisons que les entiers; nous pouvons donc les multiplier, les di-

viser, les ajouter, les soustraire : en effet on a besoin assez souvent dans le commerce de sçavoir la différence de $\frac{3}{4}$ à $\frac{2}{3}$, de connoître la somme de $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{24}$.

32. Pour faire avec intelligence sur les fractions les opérations du chapitre précédent, rendons-nous attentifs à ce qui constitue une fraction ; voyons ce que signifient les $\frac{3}{4}$ d'un écu.

Je remarque que les $\frac{3}{4}$ d'un écu sont précisément la même chose qu'un quart de trois écus ; car au lieu d'un écu, prenant trois écus vous avez une quantité trois fois plus grande ; mais en revanche vous en prenez trois fois moins, puisqu'au lieu de trois quarts vous ne prenez qu'un quart : il y a compensation. Il faut s'attacher à bien comprendre ce principe, qui est, ce me semble, assez clair : s'il est une fois bien conçu, toute la théorie ou tout l'artifice des fractions est entendu.

33. On dit que l'on *évalue* une fraction, quand on détermine sa valeur en quantités connues. Suivant le principe établi (n°. 32), il n'y a rien de si simple que cette détermination. Vous sçavez que les $\frac{3}{4}$ d'un écu signifient le quart de trois écus ; divisez donc 3 écus ou 9 liv. par 4, vous trouverez que 2 liv. 5 sols ou 45 sols sont les $\frac{3}{4}$ d'un écu.

On trouve donc généralement la valeur d'une fraction, en divisant son numérateur par son dénominateur. $\frac{5}{6}$ d'une toise se détermineront en quantités connues, en divisant 5 toises ou 30 pieds par 6. Le quotient 5 pieds sera la valeur de $\frac{5}{6}$ d'une toise ; ce que l'on appercevoit même sans cette opération, un pied étant la sixième partie d'une toise.

34. Une fraction est donc une division indiquée ou une division à faire, dont le numérateur est le dividende, & le dénominateur est le diviseur. Or plus un dividende est grand, le diviseur restant le même, plus aussi est grand le quotient ou le résultat de la

la division; par conséquent plus le numérateur d'une fraction sera grand, son dénominateur étant toujours le même, plus aussi la fraction sera grande. Par exemple, si le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{9}$ devient 3 fois plus grand, on aura la fraction $\frac{6}{9}$ trois fois plus grande que la fraction $\frac{2}{9}$; ce qui est clair.

En vous représentant toujours une fraction sous l'idée d'une division, rappellez-vous que plus un diviseur est grand, le dividende restant le même, moins on a au quotient: en effet, plus il y a de monde à partager une même quantité, moins il en revient à chacun; par conséquent plus le dénominateur deviendra grand, le numérateur restant le même, plus la fraction sera petite. Vous avez la fraction $\frac{3}{4}$ de toise, dont vous rendez le dénominateur 4 une fois plus grand sans toucher au numérateur; cela vous produit la fraction $\frac{3}{8}$, qui n'est que la moitié de la fraction $\frac{3}{4}$; car il est évident que 3 toises partagées à 4, donneront une fois plus qu'étant partagées à 8. Que l'on fasse attention à cet article, nous allons en faire usage.

De la Multiplication des Fractions.

35. On peut multiplier une fraction par un entier, ou par une fraction.

1°. Si vous avez à multiplier $\frac{2}{9}$ par 4, il s'agit de rendre la fraction $\frac{2}{9}$ quatre fois plus grande. Vous direz donc 4 fois $\frac{2}{9} = \frac{8}{9}$; c'est-à-dire, qu'il faut simplement multiplier le numérateur de la fraction sans toucher au dénominateur: car (n°. 34.) en rendant le numérateur d'une fraction quatre fois plus grand, la fraction devient quatre fois plus grande; il est évident d'ailleurs que $\frac{8}{9}$ valent quatre fois plus que $\frac{2}{9}$.

2°. Pour multiplier une fraction par une fraction, par exemple, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, faites attention que $\frac{4}{5}$ sont précisément la même chose que la cinquième partie de 4. Multiplions d'abord $\frac{2}{3}$ par l'entier 4, nous au-

rons $\frac{8}{3}$; mais ce produit eſt 5 fois trop fort : car on ne propoſe pas de multiplier $\frac{2}{3}$ par 4; mais ſeulement par la cinquième partie de 4 qui vaut $\frac{4}{5}$: ainſi comme le produit $\frac{8}{3}$ eſt 5 fois trop fort, on rendra $\frac{8}{3}$ cinq fois plus petit en multipliant le dénominateur 3 par 5 pour avoir $\frac{8}{15}$ cinq fois plus petit que $\frac{8}{3}$ (n°. 34.) & qui eſt par conſéquent le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

Pour multiplier une fraction par une fraction, la règle eſt donc *de multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre : le produit eſt le numérateur de la fraction que l'on cherche, dont le dénominateur eſt auſſi le produit des deux dénominateurs.*

Sur ce principe $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{3 \times 6}{4 \times 7} = \frac{18}{28}$. De même $\frac{8}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 5}{9 \times 7} = \frac{40}{63}$ &c. Il n'y a rien de ſi aiſé que la pratique de cette opération. La théorie n'en eſt pas plus difficile en ſe rappellant le n°. 34. Cette manière de calculer eſt fort commode pour trouver tout d'un coup la Réſolution de certaines queſtions qui paroiſſent d'abord aſſez difficiles. On ſeroit très-embarraſſé ſans ce calcul à déterminer à quoi ſe réduiſent les deux tiers de trois quarts de quatre cinquièmes d'une aune : au lieu qu'en ſuivant la règle de la Multiplication des fractions, on voit que les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{5}$ d'aune, en faiſant diſparoître le 3 & le 4 du deſſus & du deſſous de la fraction, parce que (n°. 21.) des quantités qui multiplient un nombre doivent être détruites par les mêmes quantités qui le diviſent.

Je dis donc que les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ ſe déterminent en multipliant tous les numérateurs les uns par les autres, & tous les dénominateurs auſſi les uns par les autres, pour faire une nouvelle fraction, dont le numérateur ſoit le produit de tous les numérateurs, & le dénominateur le produit de tous les dénomina-

teurs. Démontrons-le par parties. 1°. Les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ signifient $\frac{4}{5}$ prises $\frac{3}{4}$ de fois; ce qui se réduit à multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4}$. On demande les $\frac{2}{3}$ du produit que nous venons de trouver, c'est-à-dire, qu'il faut prendre le produit $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$ deux tiers de fois, ou le multiplier par $\frac{2}{3}$; ce qui donne, suivant la règle de la Multiplication des fractions, $\frac{3 \times 4 \times 2}{5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{5}$, comme nous l'avons déja déterminé.

Je ne fais qu'indiquer le calcul de la Multiplication, afin qu'on en voie mieux le procédé & les grandeurs qui se détruisent; ce qui en certaines rencontres abrége extrêmement les opérations. On doit y prendre garde.

Lorsqu'une fraction est telle qu'aucun des nombres qui composent son numérateur par voie de multiplication, n'est détruit par aucun de ceux qui en composent le dénominateur par la même voie, on dit que la fraction est réduite à *sa plus simple expression.* Par exemple, la fraction $\frac{5}{7}$ est réduite à sa plus simple expression; au contraire, la fraction $\frac{8}{12}$ n'y est pas réduite: car si l'on développe les nombres qui en composent le numérateur & le dénominateur par voie de multiplication, on en trouvera qui se détruisent; puisque $\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{4}{6}$; & même la fraction $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$. Ainsi $\frac{8}{12}$ se réduisent à $\frac{2}{3}$; ce qui est une expression beaucoup plus simple que $\frac{8}{12}$.

Or pour trouver tout d'un coup les nombres les plus simples auxquels se réduit une fraction, on voit qu'il faut déterminer la plus grande quantité commune qui multiplie, ou, ce qui revient au même, qui divise exactement le numérateur & le dénominateur de la fraction: par exemple, dans la fraction $\frac{8}{12}$ il est clair que 4 est le plus grand divi-

ſeur commun de 8 & de 12, puiſque $\frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$.

Mais lorſque les nombres qui compoſent le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſont plus conſidérables, on ne voit pas au premier coup ce plus grand commun diviſeur. Pour ſçavoir, par exemple, que la fraction $\frac{153}{162}$ ſe réduit à $\frac{17}{18}$, on eſt obligé de tâtonner : or on a trouvé une méthode qui ſauve le tâtonnement, c'eſt-à dire, par laquelle on trouve le plus grand diviſeur commun des deux quantités dont une fraction eſt compoſée; nous allons expoſer cette méthode.

Moyen de trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres.

36. Pour trouver le plus grand commun diviſeur des deux nombres 162, 153, diviſez le plus grand par le plus petit, c'eſt-à-dire, 162 par 153 : il eſt clair que ſi 153 diviſoit exactement & ſans reſte le nombre 162, alors le nombre 153 ſeroit réellement le plus grand commun diviſeur de 162 & 153, puiſque 153 ſe diviſe auſſi lui même exactement : mais comme 162 diviſé par 153 donne 1 au quotient avec un reſte qui eſt 9, on diviſera par ce reſte 9 le nombre 153 le plus petit des deux nombres propoſés, & la diviſion ſe faiſant exactement, on eſt ſûr que 9 eſt le plus grand commun diviſeur des nombres 153, 162 : s'il y avoit eu encore un reſte, on auroit continué à diviſer le premier reſte 9 par le ſecond, & ainſi de ſuite, en négligeant toujours les quotients, juſqu'à ce que l'on eût trouvé un nombre qui eût opéré une diviſion exacte; & ce nombre auroit été le plus grand commun diviſeur des deux quantités propoſées.

DÉMONSTRATION.

Voyez les équations A.

OPÉRATION.

(A) $162 = 153 \times 1 + 9$
$153 = 17 \times 9$

puisque 9 divise exactement 153, & qu'il se divise exactement lui-même, 9 divisera exactement $153 + 9 = 162$; donc 9 est commun diviseur de 162 & 153.

On prouvera de plus que 9 est le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, si l'on fait voir que tout nombre divisant exactement 162 & 153, divisera aussi exactement le nombre 9. Car ce nombre, quel qu'il puisse être, divisant exactement 162, divisera aussi exactement $153 + 9 = 162$; & comme on suppose qu'il divise aussi 153, il est nécessaire qu'il divise 9, sans quoi il ne diviseroit pas tout le nombre $162 = 153 + 9$. Ainsi le nombre 9 est le plus grand commun diviseur des nombres 162, 153. C. Q. F. D.

Division des Fractions.

37. Une fraction se divise ou par un nombre entier, ou par une fraction; quelquefois aussi un entier est divisé par une fraction.

1°. Pour diviser $\frac{4}{5}$ par 6, on doit faire attention qu'il s'agit de rendre la fraction $\frac{4}{5}$ six fois plus petite : or on rend une fraction six fois plus petite en rendant son dénominateur six fois plus grand sans toucher à son numérateur (n°. 34.). Dites donc : $\frac{4}{5}$ divisés par $6 = \frac{4}{5 \times 6} = \frac{4}{30}$, en multipliant simplement son dénominateur 5 par le diviseur 6.

En voulez-vous une démonstration bien palpa-

ble ? $\frac{4}{5}$ de toiſe ſignifient que la toiſe eſt diviſée en cinq parties, dont on en prend quatre : or quand vous multipliez le dénominateur 5 par 6, la nouvelle fraction $\frac{4}{30}$ fait voir que la même toiſe eſt diviſée en 30 parties, dont on en prend auſſi 4 : la toiſe qui n'étoit d'abord diviſée qu'en 5 parties, l'étant en 30, eſt diviſée en 6 fois plus de parties ; les parties ſont donc 6 fois plus petites ; ainſi $\frac{4}{30}$ ſont 6 fois plus petites que $\frac{4}{5}$. La fraction $\frac{4}{5}$ eſt donc réellement diviſée par 6 lorſqu'elle devient $\frac{4}{30}$, c'eſt-à-dire, lorſque l'on multiplie ſon dénominateur 5 par 6.

2°. Si vous avez une fraction à diviſer par une fraction, c'eſt-à dire, ſi l'on vous demande, par exemple, combien de fois $\frac{3}{4}$ ſont contenus dans $\frac{6}{7}$, faites ce raiſonnement : ſi j'avois $\frac{6}{7}$ à diviſer par l'entier 3, j'écrirois $\frac{6}{7 \times 3}$. Mais ce n'eſt pas par 3 qu'il faut diviſer $\frac{6}{7}$, c'eſt par $\frac{3}{4}$ ou par le quart de 3 : ainſi en le diviſant par 3, je l'ai diviſé par une quantité 4 fois trop forte ; le quotient ou la fraction $\frac{6}{7 \times 3}$ eſt donc 4 fois trop petite : nous la rendrons donc 4 fois plus grande, en multipliant ſon numérateur 6 par 4 pour avoir $\frac{6 \times 4}{7 \times 3}$ ou $\frac{24}{21} = 1 + \frac{3}{21} = 1 + \frac{1}{7}$, qui fait voir que $\frac{3}{4}$ eſt contenu dans $\frac{6}{7}$ une fois plus un ſeptième de fois.

On voit donc qu'afin de diviſer une fraction par une fraction, on doit multiplier en ſautoir, c'eſt-à-dire, en appliquant la règle à notre Exemple, que l'on doit multiplier le numérateur 6 de la fraction à diviſer $\frac{6}{7}$ par le dénominateur 4 de la fraction $\frac{3}{4}$ qui ſert de diviſeur, & le dénominateur 7 par le numérateur 3. Voici comment cela doit s'écrire : $\frac{6}{7}$ diviſés par $\frac{3}{4} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \times 4}{7 \times 3} = \frac{24}{21} = 1 + \frac{3}{21} = 1 + \frac{1}{7}$. Le ſautoir $\times$ montre que 4 doit multiplier 6, & que 3 doit multiplier 7 ; en prenant bien garde que

le produit du numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur doit compoſer le numérateur du quotient que l'on cherche, & que le produit du dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur doit former le dénominateur de ce même quotient.

Remarquez que la fraction $\frac{24}{21}$ eſt devenue $1 + \frac{3}{21}$, puiſque $\frac{24}{21}$ ſignifie la vingt & unième partie de 24 : or en diviſant 24 par 21 on trouve $1 + \frac{3}{21} = 1 + \frac{1 \times 3}{7 \times 3} = 1 + \frac{1}{7}$, dernier réſultat que nous avons trouvé.

Conſidérez encore combien il eſt commode d'indiquer les produits par les nombres qui les compoſent, quand on calcule des fractions : car en écrivant $\frac{1 \times 3}{7 \times 3}$ au lieu de $\frac{3}{21}$, nous avons vu tout-à-coup que $\frac{3}{21}$ ou $\frac{1 \times 3}{7 \times 3}$ ſe réduit à $\frac{1}{7}$, le 3 qui diviſe anéantiſſant le 3 qui multiplie.

Suivant ce qui vient d'être établi, $\frac{4}{5}$ à diviſer par $\frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 2} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$. Tout ce détail ne regarde que la démonſtration : car dans la pratique $\frac{4}{5}$ diviſé par $\frac{2}{3} = \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$ ou $1 + \frac{1}{5}$.

3°. Pour diviſer un entier par une fraction, par exemple 8 par $\frac{3}{5}$, vous direz 8 diviſé par $3 = \frac{8}{3}$, fraction 5 fois plus petite que celle que l'on cherche, parce qu'il faut diviſer 8 par le cinquième de 3 ſeulement; on multipliera donc $\frac{8}{3}$ par 5, & le produit $\frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$ ſera le quotient de 8 diviſé par $\frac{3}{5}$.

D'où il ſuit qu'un entier ſe diviſe par une fraction, en multipliant l'entier par le dénominateur de la fraction, & diviſant ce produit par le numérateur de la même fraction.

Mais, dira-t-on peut-être, à quoi bon ce calcul? eſt ce qu'il y a des circonſtances où l'on ſoit

obligé de diviser une fraction par une fraction ? A-t-on jamais proposé de diviser $\frac{4}{5}$ par la septième partie de 2 ou par $\frac{2}{7}$? Cela n'est pas rare.

EXEMPLE.

Les $\frac{3}{4}$ d'une étoffe valent les $\frac{5}{6}$ d'une autre étoffe ; combien $\frac{8}{9}$ de la première vaudront-elles de la seconde ?

RÉSOLUTION.

Cette question se résout par une Règle de trois, où l'on sait qu'il faut multiplier les deux derniers termes $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ l'un par l'autre, afin d'avoir le produit $\frac{5\times8}{6\times9}$ à diviser par le premier terme $\frac{3}{4}$. Ainsi l'on écrira $\frac{5\times8}{6\times9} \times \frac{3}{4} = \frac{5\times8\times4}{6\times3\times9} = \frac{5\times2\times4\times4}{3\times2\times3\times9} = \frac{5\times4\times4}{3\times3\times9} = \frac{80}{81}$; ce qui signifie qu'il ne s'en faut que $\frac{1}{81}$ que les $\frac{8}{9}$ de la première étoffe ne valent une aune de la seconde. Car ajoutant $\frac{1}{81}$ à $\frac{80}{81}$, on a $\frac{81}{81}$ ou la quatre-vingt-unième partie de $81 = 1$. En effet 81 divisés par 81 donnent 1.

AUTRE EXEMPLE.

Les $\frac{2}{3}$ d'un Terrein suffisent à 6000 hommes pour s'y ranger en bataille ; combien y en rangeroit-on dans les $\frac{3}{4}$?

RÉSOLUTION.

C'est encore une Règle de trois. Dites : puisque $\frac{2}{3}$ reçoivent 6000 hommes, combien $\frac{3}{4}$ en recevront-ils ? Multipliez 6000 par $\frac{3}{4}$, vous aurez $\frac{18000}{4}$ qu'il faut diviser par $\frac{2}{3}$ en écrivant $\frac{18000}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{54000}{8} =$ la huitième partie de 54000 ; c'est 6750 hommes que l'on pourroit ranger dans les $\frac{3}{4}$ de ce terrein. En voilà bien assez pour faire voir la nécessité de ce calcul.

On sera peut-être surpris de ce que je traite de la

Multiplication & de la Division des Fractions, sans avoir rien dit de leur Addition ni de leur Soustraction. C'est qu'en général l'Addition des Fractions est plus difficile que leur Multiplication ou leur Division, qui vont même nous servir de principes pour faire cette opération.

De l'Addition des Fractions.

38. Les Fractions, dont on propose de faire l'Addition, ont une même dénomination, ou en ont une différente.

1°. Quand elles ont une même dénomination, c'est l'opération du monde la plus simple. Qui ne voit pas en effet du premier coup que $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{9}$ sont $\frac{6}{9}$? de même que $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{7}$ font ensemble $\frac{6}{7}$; c'est-à-dire, que *pour ajouter des Fractions qui ont une même dénomination, on fait simplement l'Addition de leurs numérateurs, & l'on écrit sous cette somme le dénominateur commun.*

Voulez-vous déterminer la somme des 4 fractions $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{1}{15}$? Dites $\frac{2}{15}$ & $\frac{4}{15}$ font $\frac{6}{15}$, & $\frac{5}{15}$ font $\frac{11}{15}$, & $\frac{1}{15}$ font $\frac{12}{15} = \frac{4\times3}{5\times3} = \frac{4}{5}$ (n°. 36.) cela est assez clair.

2°. Si les fractions proposées n'ont pas une même dénomination, pourvû que l'on puisse la leur donner sans changer leur valeur, il est certain que l'on en trouvera la somme aussi facilement que si elles avoient un même dénominateur.

Or pour concevoir bien clairement comment une fraction peut acquérir un nom différent sans changer de valeur, il ne faut que se rappeller ce principe, *qu'une quantité devenue quatre fois plus grande n'a point réellement changé de valeur, si on la rend quatre fois plus petite.* Prenons la fraction $\frac{2}{3}$, rendons-la 4 fois plus grande, c'est-à-dire, multiplions-la par 4;

elle deviendra $\frac{8}{3}$ (n°. 35.) : mais si nous rendons la fraction $\frac{8}{3}$ quatre fois plus petite, c'est-à-dire, qu'on la divise par 4, elle deviendra $\frac{8}{12}$ (n°. 37.) $= \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$, telle qu'elle étoit auparavant.

39. Ainsi une fraction dont on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre, ne change point de valeur. $\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$. On pourra donc prendre $\frac{9}{15}$ à la place de $\frac{3}{5}$, suivant que l'un paroîtra plus commode que l'autre.

Cela posé, *pour trouver la somme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, vous leur donnerez la même dénomination, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la première fraction $\frac{2}{3}$, par le dénominateur 4 de la seconde fraction $\frac{3}{4}$, & le numérateur & le dénominateur de la seconde fraction $\frac{3}{4}$, par le dénominateur 3 de la première fraction $\frac{2}{3}$; l'on fera ensuite l'addition de ces deux fractions réduites à la même dénomination.* Voici le détail de cette opération : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2\times4}{3\times4} + \frac{3\times3}{3\times4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Car il est évident que la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4}$ (n°. 39.) de même que la fraction $\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{3\times4}$. Ainsi à la place des deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ qui n'ont pas une même dénomination, on peut prendre les fractions équivalentes $\frac{2\times4}{3\times4}$, $\frac{3\times3}{4\times3}$ ou $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, de même dénomination, dont la somme est évidemment $\frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

La somme des fractions $\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{5\times8}{6\times8} + \frac{7\times6}{6\times8} = \frac{40}{48} + \frac{42}{48} = \frac{82}{48} = 1 + \frac{34}{48} = 1 + \frac{17}{24}$; car $\frac{34}{48} = \frac{17\times2}{24\times2} = \frac{17}{24}$.

Il est aisé de voir pourquoi les fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ sont réduites en quarante-huitièmes : car en multipliant d'abord le dessus & le dessous de la fraction $\frac{5}{6}$ par

8, le nombre 6 eſt multiplié par 8 ; & lorſque l'on multiplie les deux nombres de la fraction $\frac{7}{8}$ par 6, le nombre 8 eſt multiplié par 6 : or 6 × 8 ou 8 × 6 donne toujours le même produit 48.

En général, dans quelque ordre que l'on multiplie pluſieurs mêmes quantités entr'elles, on aura toujours le même produit. Ainſi $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 2 \times 4 \times 3 = 120$. Cela paroît aſſez. Je ne m'arrête pas à le démontrer.

On n'eſt pas toujours borné à trouver la ſomme de deux fractions ; on peut en avoir quatre, cinq, ſix, &c. Dans ce cas, pour réduire les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, &c. à la même dénomination & en déterminer la ſomme, quand on agira ſur une fraction, on en multipliera le deſſus & le deſſous par le produit de tous les dénominateurs des autres fractions. Ainſi agiſſant ſur $\frac{1}{2}$, vous multiplierez ſon numérateur & ſon dénominateur par le produit $3 \times 5 \times 6$ de tous les dénominateurs des autres fractions, ce qui donnera $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 6}{2 \times 3 \times 5 \times 6}$: vous paſſerez à $\frac{2}{3}$ dont vous multiplierez le deſſus & le deſſous par le produit $2 \times 5 \times 6$ des dénominateurs des autres fractions ; d'où vous aurez $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 5 \times 6}$. Vous tiendrez la même conduite à l'égard des deux autres fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, comme l'expreſſion ſuivante le fait voir $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 6}{2 \times 3 \times 5 \times 6} + \frac{2 \times 2 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 5 \times 6} + \frac{4 \times 2 \times 3 \times 6}{5 \times 2 \times 3 \times 6} + \frac{5 \times 2 \times 3 \times 5}{6 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{90}{180} + \frac{120}{180} + \frac{144}{180} + \frac{150}{180}$, fractions qui ont toutes la même dénomination ; car on voit que ce ſont toujours les mêmes nombres qui concourent à former leur dénominateur : faiſant enfin l'addition de tous les numérateurs, on trouve que la ſomme de toutes les fractions propoſées $= \frac{504}{180} = 2 + \frac{144}{180} = 2 + \frac{36 \times 4}{36 \times 5} = 2 + \frac{4}{5}$.

On a besoin quelquefois de donner à un entier la dénomination d'une fraction. On voudroit que 4 eût la même dénomination que $\frac{3}{7}$. Multipliez 4 par 7 dénominateur de la fraction ; vous aurez 28, sous lequel posant 7, la quantité $\frac{28}{7}$ a la même dénomination que $\frac{3}{7}$, sans que ce nombre 4, devenu $\frac{28}{7}$, ait changé de valeur.

Car $\frac{28}{7} = \frac{4 \times 7}{7}$. Or nous avons vu qu'une grandeur multipliée & divisée en même tems par un même nombre demeuroit dans son premier état : effectivement $\frac{28}{7}$ valent la septième partie de $28 = 4$.

De même vous donnerez à 6 toutes les dénominations possibles sans changer sa valeur ; vous en ferez $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{30}{5}$, $\frac{36}{6}$, &c. & ainsi à l'infini suivant le besoin ; c'est la même chose par rapport aux autres nombres. 1 peut devenir $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. comme il est évident. Ces transformations de nombres entiers en fraction méritent d'être considérées. Nous en ferons usage dans la Soustraction des Fractions.

Soustraction des Fractions.

40. Cette opération s'entend d'abord, quand les fractions ont une même dénomination : *on ôte le plus petit numérateur du plus grand, & l'on écrit sous le reste le dénominateur commun.*

Demandez-vous la différence de $\frac{3}{8}$ à $\frac{7}{8}$? écrivez $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8}$; ainsi $\frac{4}{8}$ est la différence de $\frac{3}{8}$ à $\frac{7}{8}$. Remarquez que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Car $\frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$, en effaçant ce qu'il y a de commun au numérateur & au dénominateur.

Quand les fractions n'ont pas une même dénomination, on la leur donne ; après quoi l'on opère comme ci-dessus. On veut sçavoir de combien $\frac{5}{6}$ surpassent $\frac{3}{4}$? On écrira $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 6}{4 \times 6} =$

$\frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1\times2}{12\times2} = \frac{1}{12}$. C'est-à-dire que $\frac{5}{6}$ surpassent $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{12}$.

On ne voit pas toujours laquelle de deux fractions est la plus grande; par exemple, s'il falloit déterminer la différence de $\frac{7}{9}$ à $\frac{5}{6}$. Avant que de disposer les termes comme ci-dessus, on donneroit à ces fractions une même dénomination; l'on auroit alors $\frac{7}{9} = \frac{42}{54}$ & $\frac{5}{6} = \frac{45}{54}$: par où l'on voit que $\frac{7}{9}$ est plus petit que $\frac{5}{6}$; puisque $\frac{42}{54}$, valeur de $\frac{7}{9}$, est une quantité plus petite que $\frac{45}{54}$, valeur de $\frac{5}{6}$. On écrira donc $\frac{5}{6} - \frac{7}{9} = \frac{45}{54} - \frac{42}{54} = \frac{3}{54} = \frac{3\times1}{3\times18} = \frac{1}{18}$; cela signifie que $\frac{1}{18}$ est la différence de $\frac{5}{6}$ à $\frac{7}{9}$.

Pour retrancher une fraction d'un entier, on donne à l'entier la dénomination de la fraction proposée. Vous voulez retrancher $\frac{5}{8}$ de 1; écrivez $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$; c'est la différence de $\frac{5}{8}$ à 1.

Quand il faudra soustraire une fraction accompagnée d'un entier d'une autre fraction aussi accompagnée d'un entier; si l'on veut sçavoir, par exemple, l'excès de $3 + \frac{5}{6}$ sur $2 + \frac{8}{9}$, on donnera aux entiers la dénomination des fractions qui les accompagnent; ainsi l'on dira : $3 + \frac{5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6}$, dont on fera une seule quantité en ajoûtant leurs numérateurs; ce qui produira $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$. On fera aussi une seule quantité de $2 + \frac{8}{9}$, & l'on trouvera que $2 + \frac{8}{9} = \frac{18}{9} + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$. Après avoir ainsi préparé les quantités proposées, on ôtera $\frac{26}{9}$ de $\frac{23}{6}$ en les réduisant à la même dénomination, comme il suit $\frac{23}{6} - \frac{26}{9} = \frac{23\times9}{6\times9} - \frac{26\times6}{6\times9} = \frac{207}{54} - \frac{156}{54} = \frac{51}{54} = \frac{3\times17}{3\times18} = \frac{17}{18}$: c'est l'excès de $3 + \frac{5}{6}$ sur $2 + \frac{8}{9}$; ce qui n'a besoin pour être compris que de l'opération même.

Si l'on avoit plusieurs fractions à soustraire de plusieurs fractions, on feroit une somme de toutes les fractions à soustraire, & une autre somme des autres fractions dont on voudroit soustraire, après quoi on opéreroit comme ci dessus.

EXEMPLE.

On propose de retrancher $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.

RÉSOLUTION.

Faites une seule fraction des deux fractions $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, vous aurez $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$. Faites la même chose des deux fractions $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$, en disant : $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20}$. Or puisque $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ & que $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$, la question se réduit à ôter $\frac{7}{6}$ de $\frac{31}{20}$. Ecrivez donc $\frac{31}{20} - \frac{7}{6} = \frac{186}{120} - \frac{140}{120} = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$; c'est-à dire que $\frac{23}{60}$ est la différence de $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.

On fera la même préparation, lorsque l'on aura à multiplier ou à diviser plusieurs fractions par plusieurs fractions.

Montrons par quelques exemples l'usage de l'Addition & de la Soustraction des Fractions.

Exemple de l'Addition des Fractions.

Un Marchand a vendu dans la journée, 1°. 13 *aunes* $\frac{1}{2}$ *d'étoffe ;* 2°. 9 *aunes* $\frac{5}{8}$*;* 3°. 7 *aunes* $\frac{1}{16}$*;* 4°. 18 *aunes* $\frac{3}{4}$*; combien a-t-il vendu en tout ?*

RÉSOLUTION.

Disposez les différentes ventes ainsi que vous le voyez.

OPÉRATION.

18	aunes	$\frac{3}{4}$
13		$\frac{1}{2}$
9		$\frac{5}{8}$
7		$\frac{1}{16}$
48		$\frac{15}{16}$

Et commencez par donner la même dénomination à toutes les fractions. Il est facile de les mettre toutes en seiziémes ; vous aurez $\frac{31}{16} = 1 + \frac{15}{16}$: écrivez $\frac{15}{16}$ sous les fractions, & retenez 1 aune, que vous ajouterez aux entiers pour continuer l'Addition à l'ordinaire, dont la somme sera 48 aunes $\frac{15}{16}$, où il faut remarquer, que $\frac{15}{16} = \frac{8}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{2} + \frac{7}{16}$. De sorte que le Marchand a vendu en tout 48 aunes & demie avec $\frac{7}{16}$ d'aune.

Exemple où la Soustraction de Fractions a lieu.

Des Ouvriers ont entrepris un ouvrage où il faut 602 toises $\frac{3}{4}$ de mur ; ils en ont déja construit 278 toises $\frac{7}{8}$; combien en reste-t-il à faire ?

RÉSOLUTION.

On voit qu'il faut soustraire 278 $\frac{7}{8}$ de 602 $\frac{3}{4}$.

OPÉRATION.

602	$\frac{3}{4}$	ou $\frac{6}{8}$.
278	$\frac{7}{8}$	
323	$\frac{7}{8}$	

Réduisez d'abord $\frac{3}{4}$ en huitièmes, vous aurez $\frac{6}{8}$. Mais il n'est pas possible de retrancher $\frac{7}{8}$ de $\frac{6}{8}$: c'est

pourquoi on ajoutera aux $\frac{6}{8}$ une toise que l'on mettra en huitièmes : or $1 = \frac{8}{8}$, lequel ajouté à $\frac{6}{8} = \frac{14}{8}$. Dites maintenant : $\frac{7}{8}$ ôtés de $\frac{14}{8}$ donnent $\frac{7}{8}$. Ecrivez $\frac{7}{8}$ sous les fractions ; après quoi vous passerez à la soustraction des entiers : mais comme vous avez augmenté le nombre supérieur de 1 toise, au lieu d'ôter 8 toises dans l'opération qui va suivre, on en ôtera 9, & l'on continuera la soustraction ainsi qu'il a été enseigné (n°. 16.) : on doit trouver qu'il reste à faire 323 toises & $\frac{7}{8}$.

On doit s'exercer beaucoup au calcul des fractions : cette manière de compter est d'un très-grand secours dans les Multiplications & les Divisions composées. Une *Multiplication composée* est celle où le multiplicande & le multiplicateur (ou simplement l'un des deux) sont composés chacun de quantités de différente espece. Entendez la même chose de la *Division composée*, par rapport à son dividende & à son diviseur.

De la Multiplication composée.

EXEMPLE.

40. *On demande à combien reviennent 35 aunes d'étoffe, à 24 liv. 15 sols l'aune ?*

RÉSOLUTION.

Sans faire d'abord attention aux 15 sols, vous multiplierez 35 par 24, dont le produit est 840 liv.

OPÉRATION.

OPÉRATION.

	3 5 aunes		
	à 2 4 liv.	15	sols l'aune.
	1 4 0		
	7 0		
	8 4 0 liv.		
pour 10 f....	1 7	10	
pour 5 f....	8	15	
	8 6 6 liv.	5 f.	

Après quoi vous chercherez ce que produiront 35 aunes à 15 sols l'aune. Considérez donc que 15 f. = 10 f. + 5. Prenons 35 aunes à 10 f., il est certain que si 10 f. valoient une liv. 35 aunes vaudroient 35 liv. mais 10 f. ne sont que la moitié d'une liv. par conséquent 35 aunes ne vaudront que la moitié de 35 liv. = 17 liv. 10 f. écrivez 17 liv. 10 f. dans la place qui leur convient, & comme l'opération le montre. Enfin vous prendrez la valeur de 35 aunes à 5 f. mais comme 35 aunes à 10 sols ont produit 17 liv. 10 f. il est évident que 35 aunes à 5 f. produiront la moitié de 17 liv. 10 f. = 8 liv. 15 f. que vous écrirez sous le produit précédent : vous ferez l'addition des différents produits, & vous trouverez que 35 aunes, à 24 liv. 15 f. l'aune, produiront 866 liv. 5 f. ce qui est démontré par le procédé même.

Cette maniere de multiplier s'appelle la Multiplication *par les parties aliquotes*. Les parties aliquotes d'une quantité sont celles qui divisent exactement & sans reste la quantité dont elles sont parties. Ainsi 10 f. est une partie aliquote de la livre ; il en est la

deuxième partie : 5 sols sont la quatrième partie de la livre ; 2 sols en sont la dixième partie, & 1 sol en est la vingtième. Toutes ces parties sont donc des parties aliquotes de la livre. Mais neuf sols ou 7 sols ne sont pas une partie aliquote de la livre, parce que 9 & 7 ne divisent pas 20 sols (valeur de la livre) exactement & sans reste : mais il est facile de transformer ces quantités en parties aliquotes de la livre ; car 9 s. = 4 s. + 5 s. parties aliquotes de la livre ; puisque 4 s. sont exactement le cinquième d'une livre, & cinq sols en sont le quart.

AUTRE EXEMPLE.

Combien coûteront 267 lib. 9 onces de Thé, à 18 liv. 17 s. la lib.

OPÉRATION.

267 lib. 9 onces			
à 18 l. 17 s. la lib.			
2136			
267			
133	10 s.		pour 10 s.
66	15		pour 5 s.
26	14		pour 2 s.
9	8	6 d.	pour 8 onces.
1	3	6 $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$	pour 1 once.
5043 liv. 11 s. $\frac{3}{4}$ den.			

Calculons d'abord comme si nous n'avions que 267 lib. de Thé à 18 liv. 17 s. la lib. En multipliant 267 par 18, on aura les deux produits 2136 & 267 disposés comme on le voit dans l'opération. Ensuite on prendra la valeur de 267 lib. à 17 s. la lib. or

17 f. = 10 + 5 + 2. Ainsi nous dirons 267 lib. à 1 liv. vaudroient 267 liv. mais 10 f. n'étant que la moitié de 1 liv. on ne prendra donc que la moitié de 267 liv. = 133 liv. 10 f. par conséquent la valeur de 5 f. sera la moitié de 133 liv. 10 f. = 66 liv. 15 f. après quoi on prendra la valeur de 2 f. c'est la dixième partie de 1 liv. & par conséquent la dixième partie de 267 liv. = 26 liv. 14 f. ce que l'on trouve très facilement en doublant le dernier chiffre 7 = 14, que l'on écrira sous la colonne des sols, & mettant les deux chiffres 26 sous les livres. La raison de ceci est que, pour avoir la dixieme partie de 267 liv. il est nécessaire que tous les chiffres deviennent 10 fois *plus* petits. Or en retranchant le dernier chiffre 7, les deux nombres 26 deviennent 10 fois plus petits : ils ne valent donc alors que 26 liv. & il reste le chiffre 7 dont il faut prendre la dixième partie = $\frac{7}{10}$ de livre; mais le dixième de 1 liv. = 2 f. par conséquent $\frac{7}{10}$ = 2 fois 7 f. = 14 f. voilà pourquoi l'on double le dernier chiffre.

Cette abréviation est fort commode, quand on veut prendre la dixième partie d'une quantité de livres. Poursuivons notre opération. Il s'agit à présent de trouver la valeur de 9 onces = 8 + 1. Or 8 onces sont la moitié d'une livre pesant, & la livre pesant est supposée valoir 18 liv. 17 f. dont la moitié = 9 liv. 8 f. 6 den. que l'on écrira pour la valeur de 8 onces. Il reste la valeur de 1 once qu'il faut déterminer; c'est la huitieme partie de 8 onces ou de 9 liv. 8 f. 6 den. Ainsi l'on dira : la huitième partie de 9 liv. = 1 liv., il reste 1 livre = 20 f. lesquels ajoutés à 8 f. donnent 28 f. dont le huitième = 3 f. & il reste 4 f. = 48 den. lesquels ajoutés à 6 den. produisent 54 den. dont le huitième = 6 den. + $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$. On fera une addition de tous ces différents produits, dont la somme sera 5043 liv. 11 f. $\frac{1}{4}$ den.

TROISIÈME EXEMPLE.

Une toiſe d'ouvrage eſt payée 8 *liv.* 19 *ſols* 11 *den. combien faudra-t-il payer* 12 *toiſes* 5 *pieds* 1 *pouce* 6 *lignes ?*

OPÉRATION.

12 toiſ. 5 pieds 1 pouce 6 lignes
à 8 liv. 19 ſols 11 den. la toiſe.

96				
6				pour 10 ſ.
3				pour 5 ſ.
1	4 ſ.			pour 2 ſ.
1	4			pour 2 ſ.
	6			pour 6 den.
	3			pour 3 den.
	2			pour 2 den.
4	9	11 den.	$\frac{1}{2}$	pour 3 pieds.
2	19	11	$\frac{2}{3}$	pour 2 pieds.
1	9	11	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$	pour 1 pied.
	2	5	$\frac{11}{12}+\frac{5}{72}=\frac{71}{72}$	pour 1 pouce.
	1	2	$\frac{1}{2}+\frac{71}{144}=\frac{143}{144}$	pour 6 lignes.
115 l.	12 ſ.	8 d.	$\frac{21}{144}$ ou $\frac{7}{48}$.	

Ne conſidérons d'abord que les 12 toiſes à 8 liv.

elles produiront 96 liv. ensuite pour avoir la valeur de 12 toises à 19 f. nous transformerons 19 f. en 10 + 5 + 2 + 2 = 19 f. & nous dirons : 12 toises à 10 f. = 6 liv., à 5 f. = 3 liv., à 2 f. = 1 liv. 4 f. que l'on écrira 2 fois ; après quoi on prendra la valeur de 12 toises à 11 den. = 6 + 3 + 2. Prenant d'abord pour 6 den. on dira : 6 den. sont le quart de 2 f. on prendra donc le quart de la valeur de 2 f. c'est-à-dire le quart de 1 liv. 4 f. = 6 f. ensuite pour 3 den. c'est la moitié de 6 f. = 3 f. enfin pour 2 den. c'est le tiers de 6 f. = 2 f. après cela on cherchera la valeur de 5 pieds = 3 + 2, c'est-à-dire, la moitié de la toise, & le tiers de la même toise : mais on suppose que la toise = 8 liv. 19 f. 11 den. on prendra donc la moitié de 8 liv. 19 f. 11 den. = 4 liv. 9 f. 11 den. $\frac{1}{2}$, & le tiers de cette même quantité 8 liv. 19 f. 11 den. = 2 liv. 19 f. 11 den. $\frac{2}{3}$. Pour avoir ensuite la valeur de 1 pouce, on supposera celle de 1 pied ; c'est la moitié de la valeur de 2 pieds = 1 liv. 9 f. 11 den. $\frac{5}{6}$, que l'on coupera d'un trait, pour indiquer que cette quantité ne doit pas entrer dans la somme des différens produits que l'on cherche, mais qu'elle n'a été supposée, qu'afin de trouver plus commodément la valeur de 1 pouce, douzième partie de 1 pied : on dira donc, la douzième partie de 29 f. = 2, & il reste 5 f. = 60 den. dont la douzième partie est 5 den. ensuite le douzième de 11 den. = $\frac{11}{12}$, & le douzième de $\frac{5}{6}$ = $\frac{5}{72}$ en multipliant par 12 le dénominateur 6 ; car nous avons fait voir qu'une fraction devenoit 12 fois plus petite en multipliant par 12 son dénominateur, (n°. 34.) c'est-à-dire, en le rendant 12 fois plus grand. On fera tout de suite une seule fraction des deux fractions $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{72}$ = $\frac{71}{72}$; car en multipliant par 6 le dessus & le dessous de la fraction $\frac{11}{12}$, on en fera $\frac{66}{72}$ que l'on ajoutera à $\frac{5}{72}$, pour avoir la

seule fraction $\frac{71}{72}$ de même valeur que les deux fractions $\frac{11}{72}$, $\frac{5}{72}$ prises ensemble.

Il nous reste enfin à prendre la valeur de 6 lignes; c'est la moitié de la valeur de 1 pouce, c'est-à-dire, la moitié de 2 f. 5 den. $\frac{71}{72}$ = 1 f. 2 den. $\frac{1}{2}$ + $\frac{71}{144}$ = $\frac{143}{144}$, en multipliant le dessus & le dessous de la fraction $\frac{1}{2}$ par 72, ce qui donnera $\frac{72}{144}$, lesquels ajoutés à $\frac{71}{144}$ font $\frac{143}{144}$.

Toutes ces opérations étant finies, nous donnerons la même dénomination aux quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{71}{72}$, $\frac{143}{144}$, c'est-à-dire que nous les mettrons toutes en cent quarante-quatrièmes, en multipliant le dessus & le dessous de $\frac{1}{2}$ par 72, de $\frac{2}{3}$ par 48, de $\frac{71}{72}$ par 2; ce qui produira les quatre fractions $\frac{72}{144}$, $\frac{96}{144}$, $\frac{142}{144}$, $\frac{143}{144}$, de même dénomination. On fera l'addition des numérateurs, dont la somme 453, divisée par le dénominateur commun 144, donnera 3 den. + $\frac{21}{144}$ ou $\frac{7}{48}$, en réduisant la fraction $\frac{21}{144}$ à sa plus simple expression. Enfin on fera l'addition de tous les produits trouvés, & l'on aura pour somme totale 115 liv. 12 f. 8 den. $\frac{7}{48}$.

Je me suis beaucoup étendu sur cette derniere opération, afin qu'elle serve de modele à toutes les opérations semblables.

De la Division composée.

41. Le dividende & le diviseur peuvent être tous deux composés de différentes espèces, ou simplement l'un des deux. Parcourons ces différens cas.

PREMIER EXEMPLE.

Il s'agit de partager 298724 liv. 15 f. 11 den. à 308 personnes; quelle sera la part de chacune?

OPÉRATION.

```
          2 9 8 7 2 4 | 308
          2 7 7 2     |-------------------------------
          ----------- | 969 liv. 17 f. 8 d. 175/308
            2 1 5 2
            1 8 4 8
            -------
              3 0 4 4
              2 7 7 2
              -------
Mult.           2 7 2
                  2 0
              -------
              5 4 4 0 f.
                  1 5
              -------
Divif.        5 4 5 5
              3 0 8
              -------
              2 3 7 5
              2 1 5 6
              -------
Mult.           2 1 9
                  1 2
              -------
                4 3 8
              2 1 9
              -------
              2 6 2 8 den.
                  1 1
              -------
Divif.        2 6 3 9
              2 4 6 4
              -------
                1 7 5
```

Commencez par diviser les livres à l'ordinaire ; il viendra au quotient 969 liv. & il restera 272 liv. que l'on réduira en sols en les multipliant par 20 ; le produit sera 5440 f. auxquels ajoutant 15 f. proposés dans la question, on aura 5455 f. à partager à 308 personnes, auxquelles il reviendra 17 f. que l'on écrira au quotient à côté des livres : & comme il reste 219 f. on les réduira en deniers en les multipliant par 12, ce qui produira 2628 den. auxquels joignant les 11 den. de la question, on aura 2639 den. à partager à 308 personnes ; cela produira 8 den. que l'on écrira au quotient avec le reste 175, sous lequel on posera le diviseur. 308, comme il est marqué dans l'opération : en sorte que chaque personne aura pour sa part 969 liv. 17 f. 8 den. $+ \frac{175}{308}$ de denier.

SECOND EXEMPLE.

58 *marcs* 5 *onces coûtent* 875 *liv.* 5 *f.* 6 *den. combien coûte le marc ?*

RÉSOLUTION.

On sait que le marc = 8 onces ; par conséquent en déterminant la valeur de 1 once, & prenant cette valeur 8 fois, on aura la valeur du marc.

OPÉRATION.

Mult. 58
8
464
5
469 onc.

875 liv. | 469 onces.
469 | 1 liv. 17 f. 3 den. + $\frac{423}{469}$

Divif. 406 valeur de l'once
20 qu'il faut multiplier

Mult. 8120 par 8. Cette multiplication
5 produit 14 liv. 18 f. 7 den.
$\frac{101}{469}$ valeur du marc.

8125 f.
469

3435
3283

Mult. 152
12
304
152
6

1830 den.
1407

Mult. 423 | 469
8 | 7 den. + $\frac{101}{469}$

Divif. 3384
3283

101

Réduisez donc 58 marcs en onces, c'est-à-dire, multipliez 58 par 8, & ajoutez les 5 onces de la question au produit 464; vous aurez 469 onces, auxquelles vous partagerez comme ci-devant les 875 liv. 5 s. 6 den. vous trouverez que la valeur de l'once = 1 liv. 17 s. 3 den. $\frac{423}{469}$. Ainsi l'on multipliera cette valeur de l'once par 8, à cause que le marc = 8 onces, c'est-à dire, que l'on commencera par multiplier par 8 le numérateur 423 de la fraction $\frac{423}{469}$, dont le produit 3384 divisé par le dénominateur 469, donnera 7 den. + $\frac{101}{469}$; après quoi l'on multipliera successivement par 8 les 3 den. 17 s. 1 liv. qui composent la valeur de l'once. Tous ces produits réunis donneront pour la valeur du marc 14 liv. 18 s. 7 den. + $\frac{101}{469}$ de denier.

TROISIÈME EXEMPLE.

En 4 jours 17 heures une fontaine fournit 5234 lib. 9 onces 5 gros d'une eau que l'on suppose couler toujours avec la même vîtesse; on demande combien cette fontaine fournit d'eau par jour?

RÉSOLUTION.

La livre pesant = 16 onces. L'once = 8 gros. Un jour = 24 heures. En déterminant donc ce qui s'écoule pendant une heure, il sera facile de voir combien cette fontaine fournit d'eau par jour; elle en fournira 24 fois plus qu'en une heure.

OPÉRATION.

Mult. 24
4
96
17
113 heures.

Divis. 5234 lib. | 113
452
714
678
Mult. 36 lib.
16
216
36
9
Divis. 585 onc.
565
Mult. 20
8
160
5
Divis. 165
113
52

46 lib. 5 onc. 1 gros $\frac{52}{113}$, ce qui s'écoule pendant une heure : lequel produit multiplié par 24 donne 1111 lib. 12 onc. 3 gros $\frac{5}{113}$: c'est ce qui s'écoule pendant un jour.

Ainsi réduisez les 4 jours en heures, vous trouverez que 4 jours 17 heures = 113 heures, auxquelles vous partagerez les 5234 lib. 9 onces 5 gros ; & chaque heure produira 46 lib. 5 onces 1 gros $\frac{52}{113}$ de gros : par conséquent, comme un jour contient 24 heures, on multipliera par 24 les 46 lib. 5 onc. 1 gros $\frac{52}{113}$ d'eau qui s'écoulent pendant une heure, pour avoir le produit 1111 lib. 12 onc. 3 gros $\frac{5}{113}$ de gros qui s'écoulent pendant un jour.

QUATRIÈME EXEMPLE.

27 *Aunes & $\frac{5}{8}$ d'étoffes coûtent* 1879 *liv.* 13 *s.* 9 *den. combien coûte l'aune ?*

RÉSOLUTION.

On cherchera à combien revient la huitième partie d'une aune, & l'on multipliera cette valeur par 8 ; le produit sera évidemment la valeur de l'aune.

Vous réduirez donc en huitièmes les 27 aunes : or nous avons vu (n°. 40.) que 1 aune = $\frac{8}{8}$ d'aune ; ainsi 27 aunes = 27 fois $\frac{8}{8}$ d'aune = $\frac{216}{8}$, lesquels ajoutés à $\frac{5}{8}$ d'aunes donnent 221 huitièmes. Partagez donc 1879 liv. 13 s. 9 den. à ces 221 huitièmes, le quotient 8 liv. 10 s. 1 den. + $\frac{64}{221}$ sera la valeur de la huitième partie d'une aune ; & par conséquent en multipliant cette valeur par 8, on aura pour la valeur de l'aune entière 68 liv. 10 den. + $\frac{70}{221}$.

OPÉRATION

Mult.	27	
	8	
	216	
	5	
	221	221
Divis.	1879 liv.	8 liv. 10 f. 1 den. + $\frac{64}{221}$ valeur de la huitieme partie d'une aune, laquelle multipliée par 8 donne 68 liv. 10 den. + $\frac{70}{221}$, valeur de l'aune.
	1768	
Mult.	111 liv.	
	20	
	2220	
	13	
Divis.	2233	
	221	
Mult.	23	
	12	
	46	
	23	
	276 den.	
	9	
Divis.	285 den.	
	221	
	64	

Ou, ce que l'on trouvera peut-être plus commode, après avoir réduit les 27 aunes $\frac{5}{8}$ en $\frac{221}{8}$, on divisera la quantité 1879 liv. 19 f. 9 den. par la

fraction $\frac{221}{8}$, ce qui se fait (nº. 37.) en multipliant d'abord 1879 liv. 13 s. 9 den. par le dénominateur 8, pour avoir le produit 15037 liv. 10 s. que l'on divise ensuite par le numérateur 221, ce qui donne au quotient 68 liv. 10 den. + $\frac{79}{221}$ de denier, comme ci-dessus.

Je préférerois, dans la pratique, cette manière de calculer à la précédente, où l'on a vu qu'après avoir trouvé que la huitième partie de l'aune revient à 8 liv. 10 s. 1 den. + $\frac{64}{221}$, il a fallu multiplier tous les termes de cette derniere quantité par 8 pour trouver la valeur de l'aune; ce qui entraîne un plus grand détail, sur tout lorsqu'il s'y rencontre une fraction, qui ne manque presque jamais : ainsi que je vais en convaincre le Lecteur par quelques exemples bien détaillés.

EXEMPLE.

97 Toises 4 pieds 7 pouces de terrein ont coûté 78957 liv. 19 s. 11 den. quelle est la valeur de la toise?

RÉSOLUTION.

On voit d'abord que c'est-là une division, puisqu'il s'agit de partager une somme en plusieurs parties, pour sçavoir la valeur de chacune. Mais comme on se propose par la division de faire des parties égales, si les unités par lesquelles on veut diviser ne le sont pas, il est clair que le quotient n'exprimera pas ce que l'on cherche. Or c'est ce qui arrive ici; puisque 97 toises 4 pieds 7 pouces sont des unités de différentes espèces, ou, ce qui revient au même, sont des unités inégales. On en fera donc des parties égales, en les réduisant en pouces; ce qui produira 7039 pouces, qui ont coûté 78957

liv. 19 f. 11 den. suivant la question. En divisant donc cette derniere somme par 7039, on auroit au quotient la valeur du pouce; mais cete valeur seroit 72 fois trop petite; car on demande celle de la toise qui vaut 72 pouces. Pour éviter de multiplier ce quotient par 72, & pour ne pas tomber dans les longueurs d'une multiplication de fraction, laquelle a presque toujours à sa suite une division, on rendra le dividende 72 fois plus grand, c'est à dire, que l'on multipliera 78957 liv. 19 sols 11 den. par 72; & pour y parvenir d'une maniere commode, on fera usage du moyen que je vais proposer.

OPÉRATION.

78957 liv.	19 f.	11 den.	
à multiplier par...........		72	
3	6	pour 11 den.	
36	0	10 f.	
18	0	5 f.	
14	8	4 f.	
157914			
552699			
5684975 liv.	14 f.		

On dira donc : 72 fois 11 deniers, c'est la même chose que 11 fois 72 deniers; mais 72 deniers = 6 sols, c'est donc 11 fois 6 sols = 3 l. 6 f. que l'on écrira, comme on le voit dans l'opération, pour la valeur de 11 den. multipliés par 72 : après quoi il faudra multiplier 19 par 72; ce que l'on fera en partageant 19 f. en 10 f. 5 f. & 4 f. & en multipliant successivement 10 f. par 72. 5 f. par 72. & 4 f. par 72. L'opération ira très vîte en considérant que si 10 f.

étoient une livre, on auroit 72 livres; mais comme 10 s. ne sont que la moitié d'une livre, on n'aura que 36 liv. pour la valeur de 10 s. multipliés par 72, & par conséquent 18 liv. pour 5 s. moitié de 10 s. On raisonnera de même pour les 4 sols; car si 1 liv. multipliée par 72 donne 72, 4 s. qui ne sont que le cinquième d'une livre ne produiront que le cinquième de 72, * c'est-à-dire 14 liv. 8 s. Enfin multipliant à l'ordinaire 78957 par 72, on aura un produit, lequel disposé sous les produits précédens, comme l'opération le montre, contribuera à former le produit total 5684975 liv. 14 s.

Le dividende proposé étant devenu par ce moyen 72 fois plus grand qu'il n'étoit; si on le partage aux 7039 pouces, chaque pouce aura une valeur 72 fois plus grande que celle qui lui convient; ce sera donc la valeur de la toise, puisque la toise vaut 72 pouces; & c'est précisément tout ce que l'on demande. Divisez donc 5684975 liv. 14 s. par 7039, & vous trouverez que la valeur de la toise = 807 liv. 12 s. 9 den. $\frac{3681}{7039}$.

AUTRE EXEMPLE.

59 lib. 1 marc 5 onc. 7 gros ont coûté 48657 liv. 13 s. 10 den. à combien revient la livre pesant?

RÉSOLUTION.

On procédera comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, que l'on commencera par réduire en gros

* Ce que l'on a en disant: le cinquième de 7 dixaines = 1 dixaine, & il reste 2 dixaines de livres, lesquelles jointes aux deux unités de livres = 22 liv. dont le cinquième = 4, & il reste 2 liv. qui valent 40 sols, dont le cinquième = 8 s. de manière que le cinquième de 72 = 14 liv. 8 sols.

gros les 59 lib. 1 marc 5 onces 7 gros, en se rappellant que la livre = 2 marcs, le marc = 8 onces, l'once = 8 gros. Cela produira 7663 gros, auxquels partageant les 48657 liv. 13 f. 10 den. on auroit la valeur du gros; mais cette valeur seroit 128 fois plus petite que celle que l'on cherche, puisqu'on demande la valeur de la livre qui vaut 128 gros, comme on le connoît en multipliant 16 onces, valeur de la livre, par 8 gros, valeur de l'once.

Pour sauver donc les embarras qui pourroient résulter de la valeur du gros multiplié par 128, afin d'avoir celle de la livre; après avoir réduit 59 lib. 1 marc 5 onces 7 gros, en 7663 gros, on multipliera le devidende 48657 liv. 13 f. 10 den. par 128. Mais on ne commencera pas cette multiplication par les deniers, comme dans l'exemple précédent, où le multiplicateur étant 72, donnoit précisément un nombre de sols par la multiplication des deniers; ce qui n'arriveroit point ici en multipliant les 10 den. de cet exemple par 128, à cause que 12 deniers ne sont point compris un certain nombre de fois sans reste dans 128.

On commencera donc par les livres, ainsi que l'indique l'opération.

OPÉRATION.

48637 l.	13 s.	10 d.	
à mult. par . . 128.			
389256			
97314			
48657			
64			pour 10 s.
12	16 s.		2
6	8		1
3	4		6 d.
1	1	4 den.	2
1	1	4	2
6228184 l.	10 s.	8 den.	

C'est-à-dire, qu'après avoir multiplié 48657 liv. par 128, on passera à la multiplication des sols par 128; & l'on partagera, pour la commodité, les 13 s. de l'exemple en 10 s. 2 s. & 1 s. & l'on aura 64 liv. pour la valeur de 10 s. par 128; & par conséquent 12 liv. 16 s. cinquième partie de 64, pour 2 s. cinquième partie de 10 s. enfin la moitié de 12 liv. 16 s. c'est-à-dire, 6 liv. 8 s. pour 1 s. Ensuite ayant partagé les 10 deniers en 6, 2, & 2, on dira: puisque 1 s. × 128 a produit 6 liv. 8 s. & six deniers, moitié d'un sol, donneront 3 liv. 4 s. moitié de 6 liv. 8 s. & pour 2 deniers, qui sont le tiers de 6 den. on prendra le tiers de 3 liv. 4 s. c'est-à dire, 1 liv. 1 s. 4 d. que l'on écrira deux fois, ainsi que l'opération l'indique; & la réunion de ces différens produits donnera le produit total

6228184 liv. 10 s. 8 d. que l'on divisera aux 7663 gros; & le quotient 812 liv. 15 s. 2 d. $\frac{428}{7663}$. indiquera ce qui revient à chaque gros : mais comme le dividende de l'exemple est devenu 128 fois plus grand, la valeur du gros est 128 fois trop grande; c'est donc le véritable prix de la livre qui vaut 128 gros, & la question est résolue.

Tout cela fait sentir l'importance du calcul des fractions, auquel au doit être extrêmement exercé, non-seulement dans la pratique, mais dans la théorie, qui a le merveilleux avantage de faire retrouver les règles quand on les a oubliées.

42. Je ne veux pas vous laisser ignorer un moyen de faire la multiplication & la division composées, qui peut avoir son utilité en certains cas.

EXEMPLE.

4 Toises 5 pieds 9 pouces d'un ouvrage sont estimées 48 liv. 11 s. 9 den. à combien reviendront 7 toises 1 pied 5 pouces du même ouvrage?

RÉSOLUTION.

Cette question se résout par une Règle de trois: elle exige par conséquent que l'on fasse usage de la multiplication & de la division composées, puisque (n°. 24) on doit multiplier les deux dernieres quantités, c'est-à-dire, 48 liv. 11 s. 9 den. par 7 toises 1 pied 5 pouces, & en diviser le produit par la premiere quantité 4 toises 5 pieds 9 pouces; mais nous allons ramener ces opérations composées à des opérations simples.

Pour cela, réduisons chaque quantité à la plus basse espèce qu'elle renferme dans la question, c'est-à-dire, réduisons les toises & les pieds en pouces;

les livres & les sols en deniers. On sçait que la toise = 72 pouces, & que le pied en vaut 12; que la livre = 20 fois 12 deniers = 240 den.

Ainsi 4 toises 5 pieds 9 pouces = 357 pouces: 48 liv. 11 s. 9 den. = 11661 den. 7 toises 1 pied 5 pouces = 521 pouces; par conséquent la question proposée se réduit à celle-ci : *357 pouces valent 11661 den. combien faudra-t il payer pour 521 pouces?* où il n'y a plus de quantités de différente espece.

On multipliera donc 11661 par 521, & on en divisera le produit 6075381 den. par le premier terme 357; ce qui donnera 17017 den. × $\frac{312}{357}$ de denier pour la valeur de 7 toises 1 pied 5 pouces = 521 pouces : ensuite on déterminera par la division combien il y a de sols dans 17017 den. en divisant cette quantité par 12; on trouvera que 17017 den. valent 1418 s. 1 den. lesquels réduits en livres, donnent 70 liv. 18 s. 1 den. ensorte que 7 toises 1 pied 5 pouces valent 70 liv. 18 s. 1 den. × $\frac{312}{357}$ de denier.

En voilà bien assez, je pense, pour n'être plus embarrassé dans la résolution d'une division composée, quelle qu'elle puisse être.

Cependant je ne quitterai pas cet article, sans expliquer certaines difficultés qui ne manquent pas d'arrêter tous les calculateurs, qui ne se sont pas rendus assez attentifs à la théorie du calcul.

Solution de quelques difficultés que l'on forme sur la Multiplication & sur la Division des Entiers & des Fractions.

41. Appliquons les difficultés à des exemples. 1°. Une toise d'ouvrage coûte 6 liv. combien coûteront 5 toises? Il est évident que l'on doit multi-

plier 6 liv. par le nombre 5 qui exprime les toises; mais au lieu de 5 toises on peut, dit-on, substituer sa valeur en pouces, & prendre 5 fois 72 pouces = 360 pouces à la place de 5 toises, & multiplier 6 liv. par 360 pouces, qui sont la même chose que 5 toises : or le produit de 6 liv. par 360, est très-différent du produit de 6 liv. par 5 ; comment donc peut-il se faire qu'une même quantité multipliée par des valeurs égales, ne donne pas le même produit?

De même 1 f. = 12 den. par conséquent, dit-on encore, 1 f. multiplié par 1 f. doit donner la même chose que 12 deniers multipliés par 12 deniers; cependant cela est très-faux : car 1 f. × 1 f. = 1 f. & 12 den. × 12 den. = 144 den. = 12 f. produit 12 fois plus grand que le premier.

En général, la réponse que l'on doit faire à ces sortes de difficultés, est que l'on ne multiplie point des toises par des livres, ni des sols par des sols. Il faut se rendre attentif à ce que l'on prend pour unité; c'est là-dessus que l'on règle la quantité de fois que l'on doit agir. Ainsi dans la première question, la toise étant prise pour unité, si 1 toise exige 6 liv. il est évident que 5 toises exigeront 5 fois 6 liv. or quand vous convertissez 1 toise en 72 pouces, le nombre 72 ne signifie pas 72 unités, mais seulement 72 soixante & douzièmes de l'unité ou $\frac{72}{72}$, parce qu'un pouce est la soixante & douzième partie de 1 toise : on fait donc un sophisme ou une lourde faute, quand on substitue 72 pouces à la place de 1 toise, pour multiplier ensuite par 72 pouces, comme si c'étoient 72 unités; on oublie qu'ayant pris une toise pour l'unité, 72 pouces ne sont réellement que $\frac{72}{72}$ de l'unité.

Calculons présentement suivant cette explication : on verra que nous retrouverons toujours le

même produit, soit que la multiplication se fasse par les toises, soit qu'elle se fasse par les pouces. Car 5 toises à 6 liv. la toise = 30 liv. au lieu de 5 toises prenons 360 pouces, c'est-à-dire $\frac{360}{72}$ de toise, & multiplions 6 liv. par ce nombre, nous aurons $\frac{360 \times 6}{72} = \frac{2160}{72}$ ou la soixante & douzième partie du nombre 2160; divisant donc cette quantité par 72, on trouve 30 comme auparavant.

C'est la même solution par rapport au second cas, où l'on suppose que 1 s. × 1 s. ne produit que 1 s. Un sol est pris alors pour l'unité, & par conséquent un denier qui est la douzième partie d'un sol, doit être pris pour la douzième partie de l'unité = $\frac{1}{12}$: c'est pourquoi quand on multiplie 12 deniers par 12 deniers, on ne suit pas l'état de la question; c'est $\frac{12}{12}$ qu'il faut multiplier par $\frac{12}{12}$, ce qui produit $\frac{144}{144}$ = 1; résultat tout-à-fait égal au produit de 1 par 1. On voit donc que ces difficultés n'ont lieu que pour exercer l'esprit des autres, ou parce que l'on n'a pas soi-même l'esprit assez exercé.

2°. Quand on propose de diviser 12013 liv. à 35 personnes; pour déterminer le premier membre de la division, la règle est de prendre autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a au diviseur, en cas que le diviseur puisse être compris dans ces chiffres du dividende; mais, quand cela n'arrive pas, on prend un chiffre de plus au dividende qu'au diviseur: ainsi comme on voit que 35 n'est pas compris dans 12, qui sont les deux premiers chiffres du dividende 12013 liv. on prend les trois chiffres 120 qui déterminent alors le premier membre de la division. La raison que l'on donne de ce procédé, est que 12 étant plus petit que 35, il n'est pas possible que 35 soit contenu dans 12.

A ce raisonnement on en oppose un autre, qui forme une assez bonne difficulté. Il est vrai que 35 n'est pas compris dans 12 unités; mais ces 12 pris du dividende signifient douze mille = 12000; or il est évident que 35 est compris dans 12 mille : il y a plus, 35 est contenu dans le premier chiffre 1 du dividende, puisque ce chiffre 1 = 10000. Cette première Règle de la division n'est donc pas fondée sur une raison bien claire.

Il faut convenir que 35 est contenu dans le premier chiffre 1 du dividende mis sous la forme de 10000; mais ayant pris 1 dixaine de mille pour l'unité, l'expression 10000 ne signifie pas dix mille unités. Elle fait voir que vous avez rompu l'unité en ses 10000 parties égales, que vous pourriez en effet partager à 35 personnes; & le quotient n'exprimeroit alors que des parties de l'unité, & non pas des dixaines de mille, puisqu'il n'y en a qu'une au dividende : c'est pourquoi on rompt cette dixaine de mille en 10 mille, que l'on joint aux 2 mille suivans, pour avoir 12 mille à partager à 35 personnes; en cet état, c'est 1 mille qui est pris pour l'unité; or l'on ne sçauroit encore diviser ces 12 nouvelles unités par 35; on les rompra donc en de plus petites parties. Celles qui suivent les mille sont des cens; par conséquent ces 12 mille seront transformés en 120 cens, que l'on peut en cette qualité partager à 35 personnes, puisque 1 cent étant pris pour l'unité, 120 composeront 120 unités dans lesquelles le diviseur 35 est compris : il viendra donc au quotient quelques-unes de ces unités, c'est-à-dire, quelques cens.

C'est ainsi qu'en approfondissant la nature des nombres, on lève les difficultés que leurs combinaisons font naître, & que l'on se garantit de l'illusion des premières apparences.

K iv

3°. On a coutume de se persuader que par la multiplication on augmente nécessairement les nombres soumis à cette opération ; & l'on tombe dans quelque embarras, quand on voit que le produit de 12 par $\frac{1}{3}$ donne 4, qui est plus petit que le nombre 12. De même que $\frac{3}{5}$ multipliés par $\frac{1}{4}$ produit $\frac{3}{20}$, grandeur quatre fois plus petite que $\frac{3}{5}$. Comment se fait-il que la multiplication diminue les nombres sur lesquels elle agit ?

On s'attache un peu trop au son des mots. Considérons leur valeur. Qu'est-ce que multiplier ? C'est prendre un nombre autant de fois qu'une question le demande : si l'on propose de multiplier par $\frac{1}{2}$, cela signifie qu'il faut prendre ce nombre une demi-fois ; le nombre multiplié devient donc une fois plus petit. Ainsi l'expression $12 \times \frac{1}{3}$ fait connoître que l'on ne doit prendre 12 qu'un tiers de fois ; or le tiers de 12 est 4. Par conséquent $12 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$, ainsi que la Règle le prescrit.

De même l'expression $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ indique qu'il faut prendre $\frac{3}{5}$ un quart de fois ou le quart de $\frac{3}{5}$. Or le quart de $\frac{3}{5}$ doit être plus petit que $\frac{3}{5}$; on ne doit donc plus être surpris que la multiplication donne $\frac{3}{20}$, qui est un produit quatre fois plus petit que le nombre à multiplier $\frac{3}{5}$.

4°. Par opposition à ce que nous venons de dire, il semble qu'un nombre divisé par un autre doit devenir plus petit ; cependant il n'est pas rare de trouver un quotient plus grand que son dividende ; divisez 24 par $\frac{1}{5}$, vous aurez pour quotient 120, cinq fois plus grand que son dividende 24. Pareillement en divisant $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{9}$, on a le quotient 6, neuf fois plus grand que son dividende $\frac{2}{3}$.

Réduisons la question à sa juste valeur. Diviser 24 par $\frac{1}{5}$, c'est chercher combien de fois $\frac{1}{5}$ est compris dans 24. Or $\frac{5}{5}$ ou 1 est contenu 24 fois dans 24 ;

donc $\frac{1}{5}$ y est contenu 5 fois davantage, c'est-à-dire 5 fois 24 $=$ 120. On voit donc pourquoi 24 divisé par $\frac{1}{5}$ donne au quotient 120, cinq fois plus grand que son dividende 24.

On fera un semblable raisonnement par rapport à $\frac{2}{3}$ divisés par $\frac{1}{9}$. Car $\frac{2}{3}$ divisés par 1 $= \frac{2}{3}$, c'est-à-dire que $\frac{2}{3}$ contiennent 1 deux tiers de fois : puis donc que $\frac{2}{3}$ divisés par 1 donnent $\frac{2}{3}$, si l'on divise par une quantité 9 fois plus petite que 1, c'est-à-dire par $\frac{1}{9}$, on doit avoir au quotient 9 fois plus que $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6$, comme on le trouve en effet suivant les Règles.

5°. Il faut bien distinguer entre une division & un partage. On peut bien diviser tout ce que l'on partage ; mais on ne peut pas toujours partager ce que l'on divise. Si vous aviez 100 boisseaux de grains avec lesquels vous dussiez ensemencer 4 arpens, en divisant ou en partageant 100 par 4, on auroit au quotient 25 boisseaux pour chaque arpent ; & le quotient seroit 50, si l'on partageoit les cent boisseaux à deux arpens : mais s'il n'y avoit qu'un arpent, le partage cesseroit ; car le partage suppose nécessairement plusieurs.

On pourroit néanmoins faire la division ; puisque 100 divisé par 1 $=$ 100, ce quotient exprimeroit encore 100 boisseaux. Enfin celui qui proposeroit de partager 100 boisseaux à un $\frac{1}{2}$ arpent, proposeroit une chose absurde ; parce que si l'on ne peut pas partager à 1 arpent, à plus forte raison le partage n'aura pas lieu pour $\frac{1}{2}$ arpent : cependant quoiqu'il ne soit pas possible de partager 100 à $\frac{1}{2}$ arpent, ce n'est pas à dire que l'on ne puisse pas diviser 100 par $\frac{1}{2}$, ou déterminer combien de fois $\frac{1}{2}$ est contenu dans 100. Le quotient est 200 ; mais en ce cas ce quotient ne signifie pas 200 boisseaux :

il fait voir seulement que $\frac{1}{2}$ est contenu 200 fois dans 100.

Remarquons donc combien le calcul est une machine admirable, puisqu'il conduit même à la vérité l'esprit faux & l'esprit imbécille, malgré les illusions de l'un & la stupidité de l'autre.

Comme les citoyens d'un Etat bien policé sont déterminés au bien général, malgré leurs penchans vicieux; que l'esprit invisible qui préside à la constitution des loix, les met dans l'heureuse impuissance de faire le mal; les Règles de calcul, ou en général les Règles de Mathématiques, sont aussi une quintessence de la raison, tellement ajustée à la commodité publique, que quand ceux qui font une Règle manquent d'intelligence, la Règle a de l'esprit ou de la raison pour eux.

Fin du Calcul Arithmétique.



DE L'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

44. LES nombres que nous avons calculés jusqu'à présent, ont été employés à l'expression d'une certaine quantité. Sans nous embarrasser des choses exprimées par les chiffres, nous n'avons eu égard qu'à leur nombre; par exemple, le nombre 8 a été calculé sur le pied d'un signe qui exprime une chose prise huit fois, quelle que puisse être cette chose, dont le nombre 8 a été soumis au calcul.

En effet, que ce nombre 8 représente des toises, des lieues, des poids, des mouvemens, des siècles, &c. cela ne fait rien à l'opération, ni même à son résultat; car si vous avez 8 à multiplier par 4, vous aurez toujours 32, soit que 8 représente des toises, soit qu'il exprime des écus ou toute autre chose.

Ainsi le nombre 8 ou tout autre nombre est à la vérité déterminé par sa quantité; mais il est totalement indéterminé par rapport à ce qu'il signifie, & cette indétermination ne s'oppose à aucune des combinaisons dont il est susceptible.

Ne pourroit-on pas pousser l'indétermination plus loin? Ne voit-on pas, sans aucun effort, qu'une quantité quelconque multipliée par 12, devient 12 fois plus grande qu'avant la multiplication; que dans ce dernier état, si on la divise par 3, elle ne sera plus que le tiers de sa valeur; qu'en un mot elle deviendra plus petite ou plus grande, à proportion des accroissemens ou des diminutions que son

nombre multiplicateur ou diviseur pourra recevoir.

Les quantités indéterminées sont donc susceptibles de toutes les opérations du calcul ; & l'on appelle *Algèbre*, la Science qui enseigne le calcul de ces quantités indéterminées.

On est convenu que les lettres de l'alphabet a, b, c, d, x, y, z, &c. seroient les chiffres ou les signes de ces grandeurs indéterminées. On a donné à ces lettres le nom de *quantités Algébriques*.

45. Les quantités Algébriques étant indéterminées, il a fallu inventer des *signes* pour en représenter les différentes opérations : c'est pourquoi on est convenu que le signe $+$ marqueroit une addition, & le signe $-$ une soustraction : ainsi l'expression $a+b$ signifie que la quantité b est ajoutée à la quantité a, & l'expression $p-m$ fait connoître que m est retranchée de p.

Pour s'exprimer avec plus de facilité dans le discours, quand on veut énoncer le signe $+$, on dit *plus*. En voyant $a+b$ on prononce *a plus b* ; & l'on appelle *moins* la petite ligne horisontale $-$. La quantité $p-m$ s'énonce par *p moins m*.

Les signes Algébriques précèdent toujours les quantités sur lesquelles on opère. Ainsi dans l'expression $p-m$, le signe précède la quantité m qui est retranchée.

Les quantités Algébriques précédées du signe $+$ sont appellées *positives*, & l'on appelle *négatives* celles qui sont précédées du signe $-$. La quantité $a+b$ montre que $+b$ est une positive, & l'on voit dans $p-m$ que $-m$ est une négative.

Toute quantité qui commence une expression Algébrique sans être précédée d'aucun signe, est toujours supposée être positive, ou être précédée du signe $+$. L'expression $p-m$ est la même que $+p-m$. On ne supprime le $+$ que

parce que cela ne peut jamais faire d'équivoque.

46. Pour multiplier une quantité Algébrique par une autre, on les joint ensemble sans aucun signe: ainsi $a\,b$ signifie que a est multiplié par b. L'expression $b\,c\,d$ fait connoître que les trois quantités b, c, d, sont multipliées les unes par les autres. De même $a\,a$ signifie a multiplié par a. Quelquefois on se sert du signe $\times$ pour indiquer la multiplication; ce signe $\times$ tient la place des mots *multiplié par*: ainsi $a \times b = a\,b$, signifie que a muliplié par b donne $a\,b$, ou est égal à la quantité $a\,b$.

47. Suivant ce que nous venons de dire, on doit écrire une lettre autant de fois qu'elle se multiplie: $a \times a \times a \times a = a\,a\,a\,a$; mais afin d'abréger on ne l'écrit qu'une fois, en mettant un peu au-dessus & à sa droite le chiffre qui indique combien de fois on la suppose écrite, c'est-à-dire qu'au lieu de $a\,a\,a\,a$ on écrit a^4: le chiffre 4 est l'*exposant* de la quantité a; de même $a\,a\,a\,a\,b\,b\,b$ doit s'écrire $a^4 b^3$.

48. Le produit d'une quantité par elle-même s'appelle la *seconde puissance*, ou le *second degré* de cette quantité. $a\,a$ ou a^2 est la seconde puissance ou le second degré de a: souvent $a\,a$ ou a^2 est nommé le *quarré* de la quantité a. On dit qu'une quantité est élevée à *sa troisième puissance* ou à *son troisième degré*, quand elle est multipliée par son second degré. $a \times a^2 = a^3$ qui est la troisième puissance de a. Le produit a^3 est aussi appellé quelquefois le *cube* de a: en un mot, une quantité est toujours du degré ou de la puissance qu'indique son exposant; a^7 fait voir que a est élevé au septième degré, parce que l'on prend pour premier degré d'une grandeur la grandeur elle-même.

49. Les nombres qui précèdent les grandeurs Algébriques s'appellent *coëfficiens*. Dans l'expression $3\,b\,c$, le nombre 3 est le coëfficient du produit $b\,c$: il

fait voir que la quantité $b c$ est prise trois fois. De même dans l'expression $4 d$, la quantité d a pour coëfficient le nombre 4. Quand une grandeur Algébrique n'est précédée d'aucun chiffre, il y faut toujours supposer le coëfficient 1 ; $b c$ est la même chose que $1 b c$: on y fera attention. La suppression du coëfficient 1 n'a lieu que pour simplifier le calcul.

50. Il faut bien prendre garde à ne pas confondre les coëfficiens avec les exposans. $3d$ est fort différent de d^3 ; car si l'on suppose $d = 5$, on aura $d = 15$, & $d^3 = d \times d \times d = 5 \times 5 \times 5 = 125$; ce qui est fort différent de 15. En un mot le coëfficient marque le nombre de fois qu'une grandeur est ajoutée à elle-même, & l'exposant fait voir combien de fois elle est multipliée par elle-même.

51. Le signe de la division Algébrique est une petite ligne horisontale entre le dividende que l'on met au-dessus, & le diviseur que l'on met au-dessous. Pour marquer que a est divisé par b, on écrit $\frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction.

52. Une quantité Algébrique, dont les parties son liées par les signes + ou —, est appellée *complexe* ou *polinôme* : ainsi $3 ab + 2 bc - 4 cd$ est une quantité complexe. Les parties de cette quantité qui sont séparées par les signes + ou —, s'appellent les *termes* de cette quantité ; par conséquent cette quantité a trois termes ; $3 ab$ en est un, $2 bc$ en est un autre, &c.

53. On appelle *monôme*, toute quantité Algébrique qui n'a qu'un terme. La quantité $2 bc$ est un monôme, si elle n'est accompagnée d'aucun autre terme. Le calcul des quantités complexes Algébriques n'étant qu'un calcul de monômes répété autant de fois qu'il en est besoin, l'ordre demande que nous commencions les opérations Algébriques par le calcul des monômes.

54. Les deux premières opérations de l'Algèbre, l'addition & la soustraction, sont fondées totalement sur les deux observations suivantes.

1°. Une grandeur Algébrique est dite *semblable* à une autre quantité Algébrique qui a précisément les mêmes lettres & le même nombre de lettres: 5 *a b d* est semblable à la grandeur 2 *a b d*. L'expression 5 *a b d* fait voir que le produit *a b d* est pris 5 fois; & 2 *a b d* signifie que le même produit *a b d* est pris 2 fois; ainsi le produit *a b d* est pris en tout 7 fois: on peut donc écrire 7 *a b d* au lieu de 5 *a b d* & 2 *a b d*. D'où l'on voit déjà que l'on peut rendre plus simple une expression Algébrique qui contient des termes semblables.

Pour reconnoître facilement les quantités Algébriques semblables, on ne doit point faire attention à leur coëfficient; mais il faut écrire les lettres dans l'ordre de l'alphabet. Quoique 2 *b a d* soit la même chose que 2 *a b d* ou que 2 *d b a*, cependant on aura une grande attention à ne point renverser l'ordre de l'alphabet, & d'écrire 2 *a b d*, au lieu de 2 *b a d* ou de 2 *d b a*: cela sert à rendre le calcul plus clair. 5 *a b d* & 2 *a b d* paroissent plutôt des grandeurs semblables, que 5 *b a d* & 2 *d b a* qui sont pourtant la même chose que les précédentes. Les quantités $3 b^2 c$ & $b^2 c$ sont aussi des grandeurs semblables: mais les grandeurs $4 a^3 f$ & a^3 ne sont pas semblables, quoiqu'elles aient de commun l'expression a^3; parce qu'il est essentiel aux grandeurs semblables d'avoir les mêmes lettres & le même nombre de lettres.

2°. Les quantités positives sont opposées directement aux quantités négatives qui leur sont semblables, ainsi ces quantités se détruisent réciproquement. Si la positive va en haut en partant d'un certain point, la négative descend du même point en bas. Quand l'une marque la droite, l'autre marque la gau-

che. Le gain est-il exprimé par la positive ? La perte le sera par la négative. Enfin si ce que l'on possede est du positif, ce que l'on doit est du négatif.

Par conséquent les quantités négatives sont aussi réelles que les positives. Toute leur différence consiste à agir en sens contraire : $+ 2bc$ & $- 2bc$ se réduisent à rien ; celui des deux qui a le plus de force l'emporte sur l'autre. Un homme fait effort contre un vent impétueux avec une force de 30 lib. mais il est repoussé directement en sens contraire par une force de 35 lib. l'effort de cet homme est réduit à moins que rien : car il est obligé de reculer ; puisque son action contre le vent étant exprimée par $+ 30$, la répulsion du vent doit l'être par $- 35$: or $+ 30$ & $- 35$ se réduisent à $+ 30 - 30 - 5 = - 5$, c'est-à dire 5 lib. au-dessous de rien ; car en donnant à cet homme 5 lib. de force au-dessus de ce qu'il en a, il ne produiroit encore rien en avant ; il ne feroit que se soutenir contre l'impétuosité du vent. Ainsi pour marquer la supériorité de l'un sur l'autre, on retranchera le plus petit du plus grand, & l'on donnera au reste le signe du plus grand.

Ces opérations tombent toujours sur les coëfficiens : il est évident que $+ 5df$ & $- 3df$ se réduisent à $+ 2df$, ou à $2df$, (n°. 45.) puisque $+ 5df$ montre que la quantité df est prise 5 fois, & $- 3df$ fait connoître que la même quantité df est retranchée 3 fois ; or une même quantité prise 5 fois & ôtée 3 fois, se réduit à n'être prise que 2 fois.

Pareillement $+ 5fm$ & $- 6fm$ se réduisent à $- 1fm$, ou simplement à $- fm$: car $- 6fm$ est la quantité fm ôtée 6 fois, & $+ 5fm$ est la même quantité fm remise 5 fois ; la quantité fm reste donc négative encore une fois, & est par conséquent $- fm$.

De

De la Réduction des quantités Algébriques à leur plus simple expression.

55. On ne réduit que les grandeurs qui sont semblables; ainsi 5 bc + 3 bc se réduisent à 8 bc, en écrivant une seule fois la grandeur Algébrique bc, précédée de la somme 8 des coëfficiens 5 & 3

De même la quantité $-3a^2b - 4a^2b$, devient $-7a^2b$; ce qui est évident (n°. 54.): car $-3a^2b - 4a^2b$ signifie la quantité a^2b retranchée 3 fois, & la même quantité retranchée 4 fois; c'est donc la quantité a^2b retranchée 7 fois $= -7a^2b$.

Ainsi pour réduire à leur plus simple expression les grandeurs semblables qui sont affectées du même signe, on prend la somme de leurs coëfficiens, au-devant de laquelle on écrit le signe commun —, si elles ont toutes le signe —; ou l'on écrit + quand elles sont affectées de ce signe, que l'on supprime cependant lorsqu'il y a d'autres termes qui suivent (n°. 45.).

Mais quand les grandeurs semblables Algébriques ont des signes différens, on ôte le plus petit coëfficient du plus grand, & l'on écrit devant le reste le signe du plus grand. $+4cm - 6cm$ se réduit à $-2cm$, en ôtant 4 de 6, & mettant le signe — du plus grand coëfficient devant le reste 2 cm (n°. 54.): car si un homme possede 4 louis & qu'il en doive 6, il s'en faudra 2 louis qu'il n'ait rien; ainsi pour marquer cet état au-dessous du rien, on écrit — 2 louis.

De même $4cd - 3cd$ devient $= +1cd$, ou simplement $= cd$, en supprimant le signe + & le coëfficient 1, qui ne peuvent jamais causer aucune méprise, lorsque la quantité Algébrique est seule, ou qu'elle fait le commencement d'une suite de termes. (n°. 45 & 49.)

Du calcul des Monômes, ou des quantités Algébriques qui n'ont qu'un seul terme.

DE L'ADDITION DES MONÔMES.

56. Pour ajouter la quantité a à la quantité b, on écrit ces grandeurs de suite avec le signe $+$ de l'addition, c'est-à-dire, que b avec a donne $a+b$. De même si l'on vouloit joindre la quantité $-m$ avec p, on écriroit $p-m$, en écrivant ces quantités telles qu'on les donne, positivement si elles sont positives, & négativement quand elles sont négatives.

Lorsque les grandeurs Algébriques sont semblables, on les réduit à leur plus simple expression. $3b$ ajouté à $2b$ s'écrit $3b+2b=5b$. De-même $8cd$, auquel on joint $-10cd$, devient $8cd-10cd=-2cd$. (n°. 55.)

De la soustraction des Monômes.

57. Quand on veut ôter une quantité Algébrique d'une autre quantité Algébrique, on écrit ces quantités de suite, en changeant simplement le signe de la grandeur à soustraire : on fait ensuite la réduction si ces quantités sont semblables. Ainsi pour ôter $+c$ de b, on écrit $b-c$, puisque $-$ est le signe de la soustraction ; cela ne produit aucune difficulté.

Mais pour ôter $-b$ de a, on écrit $a+b$, en changeant le signe $-$ en $+$, ensorte que la quantité a est augmentée par cette soustraction. On n'en voit pas d'abord la raison : mais considérez qu'un homme à qui l'on ôte des dettes, augmente en facultés ; son fond est réellement augmenté d'une quantité égale à la dette qu'on lui a supprimée. Oter des *moins*, c'est donc réellement donner des *plus*. En effet un homme a 100 liv. & il doit 5 liv. son état est $100-5=95$: vous voulez qu'il n'y ait

pas -5, c'est à dire que vous voulez lui ôter ses dettes; de 95 il montera donc à 100, & par conséquent il sera augmenté de 5; ainsi ôter des *moins*, c'est donner des *plus*.

Faites encore attention, que l'on n'ôte pas d'une grandeur ce qui n'y est point. Ainsi quand on propose de retrancher $-b$ de a, il faut nécessairement supposer que $-b$ accompagne a en secret, ou d'une manière enveloppée : je m'apperçois donc que a est la même chose que $a+b-b$; or s'il faut ôter $-b$ de cette dernière expression, elle devient $a+b$: par conséquent en ôtant $-b$ de a, on doit aussi avoir $a+b$.

De la Multiplication des Monômes.

58. Nous avons déja dit (n°. 46) que l'on multiplioit une grandeur Algébrique par une autre, en écrivant ces quantités les unes à côté des autres sans aucun signe; ainsi $a \times b = ab$; $cd \times m = cdm$; c'est une convention. Mais les grandeurs Algébriques sont presque toujours précédées de coëfficiens, & des signes $+$ ou $-$. En ce cas 1°. $+3cd \times +5bm = +15bcdm$; en disant : $+ \times +$ donne $+$; ensuite 3×5 donne 15; enfin $cd \times bm$ produit $bcdm$; ensorte que $+15bcdm$ est le produit de $+3cd \times +5bm$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{c} +3cd \\ \times \\ +5bm \\ \hline +15bcdm \\ \hline \end{array}$$

2°. Si vous avez une grandeur négative à multiplier par une grandeur positive, le produit doit être affecté du signe $-$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{c} -2bd \\ \times \\ +3af \\ \hline -6abdf \end{array}$$

Ainsi $-2bd\times+3af=-6abdf$; vous direz donc : $-\times+$ donne $-$. Après cela $2\times3=6$, que l'on écrira à la suite du signe $-$; & $bd\times af=abdf$. Ainsi le produit total de $-2bd\times+3af$ est $-6abdf$. Où l'on voit que $-\times+=-$. Nous en donnerons la raison un peu plus bas.

3°. Le produit d'une grandeur positive par une grandeur négative doit aussi être affecté du signe $-$; c'est pourquoi $+4rs\times-bd=-4bdrs$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{c} +4rs \\ \times \\ -bd \\ \hline -4bdrs \end{array}$$

Ce que l'on détermine en disant : $+$ multiplié par $-=-$. 4×1 (que l'on suppose toujours précéder la quantité qui n'en est pas accompagnée (n°. 49.) donne 4; enfin $rs\times bd=bdrs$. Ainsi le produit de $+4rs$ par $-bd=-4bdrs$: ce qui suppose que $+\times-=-$; nous allons le démontrer.

4°. Deux grandeurs négatives, ou affectées du signe $-$, donnent $+$ à leur produit lorsqu'elles se multiplient. $-3b\times-4d=+12bd$; & c'est ce qui ne paroît pas aisé à concevoir : comment *moins* par *moins* peut-il donner *plus*? Examinons comment les signes agissent les uns sur les autres.

DÉMONSTRATION.

La multiplication des coëfficiens ne fait aucune difficulté ; ce sont des nombres qui se multiplient comme dans l'Arithmétique : celle des quantités Algébriques est de pure convention. Il n'y a donc que la multiplication des signes qui mérite une bonne explication ; il faut prouver que $+ \times + = +$, que $+ \times - = -$, que $- \times + = -$, que $- \times - = +$.

1°. $+3 \times +4$ doit donner $+12$; car le multiplicateur $+4$ étant affecté du signe $+$, montre qu'il faut prendre la quantité $+3$ positive autant de fois qu'il est marqué par 4, c'est-à-dire, qu'il la faut prendre 4 fois telle qu'elle est ; or 4 fois $+3 = +3 +3 +3 +3 = +12$; ainsi $+ \times + = +$.

2°. $+3 \times -4 = -12$. Remarquez que le multiplicateur 4, étant affecté du signe $-$, fait connoître qu'il faut retrancher la grandeur $+3$ quatre fois. Or pour retrancher du positif, il faut mettre du négatif (n°. 57.) ; on écrira donc $-3 -3 -3 -3 = -12$: d'où l'on voit pourquoi $+ \times - = -$.

3°. $-3 \times +4 = -12$; car le multiplicateur 4 étant positif, signifie qu'il faut prendre -3 quatre fois, & par conséquent écrire $-3 -3 -3 -3 = -12$: ainsi $- \times + = -$.

4°. $-3 \times -4 = +12$. On doit toujours se régler sur le signe du multiplicateur ; son signe étant négatif, le multiplicateur -4 indique qu'il faut retrancher -3 quatre fois. Or pour ôter $-$ on écrit $+$ (n°. 57.) ; donc pour ôter -3 quatre fois, on écrira $+3 +3 +3 +3 = +12$; il est donc bien clair que $- \times - = +$

Ce n'est pas à l'apparence qu'il faut s'en tenir ; on doit toujours remonter à la valeur fondamentale des signes, C. Q. F. D.

Indépendamment de la démonstration que l'on vient de voir, on peut encore se convaincre que — × — = +. Multiplions + 8 — 3 par + 6 — 2 ; nous devons trouver le produit 20, puisque 8 — 3 = 5, & 6 — 2 = 4 ; & qu'ainsi 5 × 4 = 20 : appliquons les règles que nous venons de prescrire.

OPÉRATION.

$$
\begin{array}{l}
+\ 8 - 3 \\
\quad \times \\
+\ 6 - 2 \\
\hline
+\ 48 - 18 \\
\quad\quad - 16 + 6
\end{array}
$$

$$48 + 6 - 18 - 16 = 54 - 34 = 20$$

Multiplions successivement les deux termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur : on peut commencer par où l'on voudra ; je commence à multiplier + 8 — 3 par le premier chiffre + 6 du multiplicateur ; je dis donc : + × + = +. 8 × 6 = 48. Ensuite — × + = —. 3 × 6 = 18. Ainsi le produit de + 8 — 3 par + 6, est + 48 — 18. Passons au produit de + 8 — 3 par — 2. Disons : + × — = —. 8 × 2 = 16. Après cela — × — = + 3 × 2 = 6. Le produit de + 8 — 3 par — 2, est donc — 16 + 6. Cherchons présentement la somme des deux produits que nous venons de trou-

ver, en mettant ensemble les deux grandeurs positives + 48 + 6, pour avoir + 54; faisons aussi une somme des deux grandeurs négatives — 18 — 16 = — 34. Le produit total est donc 54 — 34 = 20, ainsi qu'on devoit le trouver; & comme nous avons observé dans cette multiplication les Règles que nous avons prescrites, (n°. 58.) il s'ensuit que ces Régles sont non-seulement infaillibles, mais que l'on tomberoit inévitablement dans l'erreur si l'on y dérogeoit.

59. On peut donc établir une Règle générale très-simple pour la multiplication des signes. *Toutes les fois que les quantités qui se multiplient ont le même signe, on écrira + au produit;* (puisque + × + = +, & que — × — = + :) *mais on écrira —, quand elles auront des signes différens;* car + × — = —; & — × + = —. (n°. 58.)

De la Division des Monômes.

60. Dans la division Algébrique, la Règle des signes + & — est la même que celle de la multiplication. Les coëfficiens se divisent comme dans l'Arithmétique. Pour les quantités Algébriques, on fait disparoître au dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, & l'on écrit le reste au quotient. Si le diviseur n'a rien de commun avec le dividende, on écrit le dividende au dessus d'une petite ligne horisontale, sous laquelle on pose le diviseur, & la division Algébrique est faite. Appliquons ceci à des exemples.

Il s'agit de diviser + 12 *b c d* par + 3 *d*. Disposez ces quantités comme dans la division Arithmétique.

OPÉRATION.

$$+ 12\,b\,c\,d \left| \begin{array}{l} +\ 3\,d\ \ldots \text{ diviseur.} \\ \hline +\ 4\,b\,c\ \ldots \text{ quotient.} \end{array} \right.$$

Et dites : + divisé par + = + ; écrivez + au quotient sous la ligne. Ensuite 12 divisé par 3 donne 4 ; posez 4 au quotient : enfin *b c d* divisé par *d* = *b c*, que vous écrirez au quotient à la suite du coëfficient 4. En supprimant, comme vous voyez, du dividende *b c d* la lettre *d*, qui est commune au diviseur 3 *d*, on écrit au quotient le reste *b c* du dividende.

Et ceci n'est pas une convention ; c'est une suite nécessaire de ce qui a été convenu par rapport à la multiplication des grandeurs Algébriques : car la multiplication étant directement contraire à la division, il faut que l'une détruise ce que l'autre établit ; ainsi *b c d* étant la même chose que la quantité *b c* multipliée par *d*, si l'on divise par *d* le produit *b c d*, on doit faire disparoître l'effet de la multiplication, & par conséquent avoir au quotient la grandeur *b c* : c'est donc une nécessité d'écrire au quotient ce qui reste du dividende, après que l'on a effacé ce qu'il a de commun avec le diviseur.

Pour vous faire voir que le quotient + 4 *b c* est le vrai quotient, comme nous sçavons que le produit du quotient par le diviseur doit être égal au dividende, multiplions le diviseur + 3 *d* par le quotient + 4 *b c*, le produit + 12 *b c d* est précisément le dividende ; ainsi le quotient trouvé est exact.

Divisons + 15 *a c f* par — 5 *a f*. Suivant ce que nous avons établi, le quotient doit être — 3 *c*. Voyons-le par parties.

OPÉRATION.

$$+15\,acf \;\Big|\; \frac{-5\,af}{-3\,c}$$

Disons : + divisé par — donne —. 15 divisé par 5 donne 3. *acf* divisé par *af* = *c*. Le quotient est donc — 3 *c*; car en multipliant le diviseur — 5 *af* par ce quotient — 3 *c*, on a le dividende + 15 *acf*; ce qui prouve la justesse de l'opération.

Remarquez, avant que d'aller plus loin, que dans l'Arithmétique le quotient est aussi ce qui reste du dividende, après que l'on en a supprimé ce qu'il a de commun avec le diviseur. Divisons 100 par 25. On ne voit point d'abord ce que 100 a de commun avec 25 : mais 100 = 25 × 4, & ce dernier dividende a 25 de commun avec le diviseur 25 ; cette quantité disparoîtra donc, & l'on écrira 4 au quotient : en effet 100 divisé par 25 = 4. Voilà pourquoi il est souvent fort utile d'indiquer les multiplications par le signe × ; parce que si dans la suite du calcul les produits doivent être divisés par des quantités qui aient des racines communes avec le dividende, on fait disparoître ces racines communes, & le calcul en devient moins embarrassé. Quelquefois même le calcul se trouve fait par la seule indication. Voulez-vous avoir tout d'un coup le quotient du triple de 75 divisé par 15 ? écrivez $\frac{15 \times 5 \times 3}{5 \times 3} = 15$, en effaçant les racines 5, 3, communes au dividende & au diviseur.

Ce qui fait que l'on ne peut pas toujours opérer dans la division Arithmétique comme dans l'Algébrique, c'est que l'on ne voit point les racines d'un

dividende Arithmétique, surtout quand ce dividende est considérable ; au lieu que l'on a sous les yeux tous les *produisans* ou toutes les racines d'un monôme Algébrique. Vous ne voyez pas sur le champ les racines qui ont concouru à produire le nombre 672 ; mais les racines du produit $a\ b\ c$ sont évidentes ; & c'est une des raisons qui rendent le calcul Algébrique beaucoup plus expéditif que celui des nombres. Continuons nos divisions Algébriques.

On propose de diviser $-18\ a^2\ b^3\ g$ par $+3\ a\ b\ g$. On doit trouver pour quotient $-6\ a\ b^2$.

OPÉRATION.

$$-18\ a^2\ b^3\ g \quad \Big| \quad \frac{+3\ a\ b\ g}{-6\ a\ b^2}$$

Car $-$ divisé par $+ = -$. 18 divisé par $3 = 6$. $a^2\ b^3\ g$ divisé par $a\ b\ g$ est la même chose que $a\ a\ b\ b\ b\ g$ divisé par $a\ b\ g$; par conséquent en effaçant les trois lettres $a\ b\ g$ que le dividende a de communes avec le diviseur, le reste $a\ b\ b$ ou $a\ b^2$ doit être écrit au quotient, qui est par conséquent $-6\ a\ b^2$. Ce que l'on prouve en multipliant le diviseur $+3\ a\ b\ g$ par ce quotient $-6\ a\ b^2$: car cette multiplication redonne le dividende $-18\ a^2\ b^3\ g$.

Pour diviser $-24\ c^3\ d^4\ f$ par $-8\ c^2\ d^3\ f$, on dira : $-$ divisé par $- = +$. Ensuite 24 divisé par $8 = 3$. Enfin $c^3\ d^4\ f$ divisé par $c^2\ d^3\ f = c\ d$. Ensorte que le quotient de cette division est $+3\ c\ d$; car le diviseur $-8\ c^2\ d^3\ f$ multiplié par le quotient $+3\ c\ d$, redonne le dividende $-24\ c^3\ d^4\ f$.

OPÉRATION.

$$-24c^3d^4f \;\Big|\; \frac{-8c^2d^3f}{+3cd}$$

Par tout ce que nous avons dit, on feroit porté à se persuader qu'une quantité Algébrique divisée par elle-même ne devroit produire rien, puisque la règle est d'effacer au quotient ce que le dividende & le diviseur ont de commun : cependant abc divisé par abc ne donne pas zéro; le quotient $= 1$. Toutes les lettres disparoissent véritablement, ainsi que le prescrit la règle; mais il faut toujours supposer qu'une grandeur Algébrique est précédée du coëfficient 1 : ainsi $\frac{abc}{abc} = \frac{1 \times abc}{1 \times abc} = \frac{1}{1} = 1$.

En effet diviser abc par abc, c'est déterminer combien de fois abc est contenu dans abc : or toute grandeur est contenue une fois dans elle-même; ainsi $\frac{abc}{abc} = 1$. Donc en général une quantité quelconque divisée par elle-même donne toujours 1 au quotient.

Quand le dividende & le diviseur n'ont rien de commun, ou qu'ils ont seulement quelques quantités communes, on indique alors la division sous la forme d'une fraction. Ainsi $3ac$ divisé par $5bs$ $= \frac{3ac}{5bs}$. De même $6df$ à diviser par $4ds = \frac{6df}{4ds}$ $= \frac{2d \times 3f}{2d \times 2s} = \frac{3f}{2s}$, en exterminant la quantité $2d$, qui est un produisant ou une racine commune au dividende & au diviseur.

Vous observerez que c'est la même chose dans la

division Arithmétique. Il n'est pas possible d'exécuter une division, à moins que le dividende & le diviseur n'aient des racines communes. On ne sçauroit diviser exactement 17 par 5, parce que le nombre 17 n'a aucunes racines communes avec 5. C'est pourquoi afin de faire cette division en partie, on agit sur 17 comme étant $15 + 2$, où la première partie $15 = 3 \times 5$, a le nombre 5 de commun avec le diviseur 5 ; la division de cette première partie se fait donc exactement : elle donne 3 au quotient. Il reste la seconde partie 2, qui n'a plus rien de commun avec 5 ; on est par conséquent obligé d'indiquer cette opération sous la forme de la fraction $\frac{2}{5}$: ainsi 17 divisé par $5 = 3 + \frac{2}{5}$.

Tout ceci mérite quelque considération : on a le plaisir de voir que l'Algèbre se conduit sur les mêmes principes que l'Arithmétique ; que les procédés de ces deux sciences bien développés se réduisent au même ; & qu'il n'y a entr'elles qu'une légère différence de forme.

Du calcul des Polinômes, ou des quantités complexes Algébriques.

Ce calcul est seulement plus long que celui des monômes ; mais il n'est pas plus difficile, puisque ce n'est qu'un calcul de monômes répété autant de fois qu'il en est besoin.

De l'Addition des Polinômes.

61. Soit le Polinôme $3a^2b^3 - 5cs^4 - 4dr + 2s$, que l'on propose d'ajouter au Polinôme $-5 + 4cs^4 - a^2b^2 + 4dr$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{l} 3\,a^2\,b^3 - 5\,c\,s^4 - 4\,d\,r + 2\,s \\ -\,a^2\,b^3 + 4\,c\,s^4 + 4\,d\,r - s \\ \hline 2\,a^2\,b^3 - \quad c\,s^4 \quad * \quad + \quad s \\ \hline \end{array}$$

On écrira d'abord l'un de ces Polinômes tel qu'il est donné : on disposera ensuite l'autre Polinôme sous celui que l'on vient d écrire, de manière que les termes semblables soient directement les uns sous les autres. On tirera une ligne sous ces Polinômes ainsi disposés, & réduisant successivement les termes semblables à leur simple expression (nº. 55.), on trouvera que la somme de ces deux Polinômes est $2\,a^2\,b^3 - c\,s^4 + s$, en mettant une petite étoile ou un zéro sous les termes qui se détruisent totalement. Le procédé de cette addition n'est pas différent de celui des Monômes; il ne faut donc pas une nouvelle démonstration.

Quand les Polinômes n'ont pas des termes semblables, on les écrit les uns à la suite des autres indifféremment avec les signes qui les accompagnent : ainsi $3\,a^2\,b - 3\,a\,b^2 + b^3$, ajouté au Polinôme $x\,x - 2\,c\,x$, où il n'y a aucuns termes semblables à ceux du premier, donne la somme $x\,x - 2\,c\,x + 3\,a^2\,b - 3\,a\,b^2 + b^3$, dans laquelle le terme $3\,a^2\,b$ est accompagné du signe $+$ qu'on lui avoit simplement supposé avant l'addition, parce qu'étant à la tête d'une suite de termes, cela ne pouvoit causer aucune équivoque.

De la Soustraction des Polinômes.

62. On disposera comme dans l'opération pré-

cédente les termes semblables les uns sous les autres, avec cette seule différence, que l'on changera tous les signes de la grandeur à retrancher en des signes contraires, c'est à-dire, que l'on mettra — où il y aura +, & le signe + où l'on verra le signe —.

Pour retrancher le Polinôme $-2acx + 3cxx + 4a^3m - 5a^3b$ (A) du Polinôme $7cxx - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd$ (B).

OPÉRATION.

$$\begin{array}{l} 7cxx - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd \ (B) \\ -3cxx + 5a^3b - 4a^3m + 2acx \ (A) \\ \hline 4cxx + a^3b + a^3m + acx + bd \end{array}$$

On disposera les termes du Polinôme A sous les termes du Polinôme B; les termes semblables sous les termes semblables, en changeant tous les signes du Polinôme A en des signes contraires; puisque (n°. 57.) ôter + c'est produire —, & soustraire — c'est donner +. Cette préparation faite, on réduira les termes semblables à leur plus simple expression. Cette réduction donnera $4cxx + a^3b + a^3m + acx + bd$, qui est la différence cherchée.

Si le Polinôme à retrancher n'a point de termes semblables à ceux du Polinôme dont on veut retrancher, on changera simplement les signes de la grandeur à soustraire; après quoi on écrira cette quantité à la suite du Polinôme dont on fait la soustraction. On veut retrancher $xx - 2cx + cc$, de $2a^4 - 3b^2$. Ecrivez $2a^4 - 3b^2 - xx + 2cx - cc$, en changeant simplement les signes de la grandeur $xx - 2cx + cc$, qui n'a aucuns termes semblables à ceux de la quantité $2a^4 - 3b^2$.

De la Multiplication des Polinômes.

63. Il faut multiplier comme dans l'Arithmétique tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur : on cherche ensuite la somme de tous ces différens produits, en réduisant les quantités semblables, s'il y en a.

OPÉRATION.

$$
\begin{array}{l}
aa - 2ac + cc \\
\times \\
a - c \\
\hline
a^3 - 2a^2c + ac^2 \\
\quad - a^2c \quad + 2ac^2 - c^3 \\
\hline
a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Pour multiplier $aa - 2ac + cc$ par $a - c$, on écrira le multiplicateur $a - c$ sous le multiplicande $aa - 2ac + cc$; & tirant une ligne, on dira : $aa \times a = a^3$; on écrira a^3, en supprimant le signe $+$. Ensuite on multipliera le terme suivant $- 2ac$ par a, en disant : $- \times + = -$: $2ac \times a = 2a^2c$; on écrira donc $- 2a^2c$ à la suite de a^3. On continuera de multiplier $+ cc$ par a, afin d'avoir $+ ac^2$, que l'on mettra à la suite de $- 2a^2c$ sous la ligne; & si le multiplicande contenoit un plus grand nombre de termes, on ne finiroit pas de multiplier par a, jusqu'à ce que tous les termes du multiplicande eussent été multipliés par ce premier terme du multiplicateur. Quand le premier terme du multiplicateur a fait son office, on fait agir de même le second terme $- c$

ſur les termes du multiplicande; ainſi l'on dira : $aa \times -c = -a^2c$, que l'on écrira ainſi qu'il eſt marqué dans l'opération; on multipliera enſuite $-2ac$ par $-c$, en diſant $- \times - = +$: $2ac \times c = 2ac^2$; le produit de $-2ac$ par $-c$ eſt donc $+2ac^2$. Enfin $+cc \times -c = -c^3$. Tous les termes du multiplicande ayant été multipliés par chaque terme du multiplicateur, on tirera une ligne ſous les produits qui en ſont venus, & faiſant la réduction de ces produits, on trouvera que le produit total eſt $a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$.

On voit par cet exemple, que l'on ne multiplie jamais qu'un monôme par un monôme : ainſi la multiplication des polinômes eſt plus longue, mais elle n'eſt pas différente de celle des monômes; c'eſt pourquoi je vais ſimplement propoſer encore quelques exemples, ſur leſquels on pourra s'exercer.

PREMIER EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 3aa - 2bb \\ \quad\times \\ 3aa + 2bb \\ \hline 9a^4 - 6a^2b^2 \\ \qquad + 6a^2b^2 - 4b^4 \\ \hline 9a^4 \quad * \quad - 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

SECOND

SECOND EXEMPLE.

$$3bc^2 - 4b^2c + b^3$$
$$\times$$
$$2bc - 3b^2$$

$$6b^2c^3 - 8b^3c^2 + 2b^4c$$
$$- 9b^3c^2 + 12b^4c - 3b^5$$

$$6b^2c^3 - 17b^3c^2 + 14b^4c - 3b^5$$

Nous avons déja fait remarquer, qu'en certaines rencontres, il étoit très-commode d'indiquer seulement le calcul de la multiplication, sans la faire; parce qu'il peut arriver dans une suite de combinaisons, que la même quantité soit diviseur d'un produit dont elle est racine. Dans ce cas on fait disparoître cette quantité sans aucun calcul; ce qui rend l'opération plus simple.

Si l'on prévoit donc qu'il soit utile d'indiquer, par exemple, la multiplication de $3xx - 2bc$ par $5cx - 4rs$, on écrira ce produit de cette manière: $\overline{3xx - 2bc} \times \overline{5cx - 4rs}$. La ligne qui est tirée sur le multiplicande & sur le multiplicateur, fait voir que tous les termes du multiplicande doivent être multipliés par chaque terme du multiplicateur.

De la Division des Polinômes.

64. Disposez le dividende & le diviseur suivant l'ordre qui a été prescrit pour la division Arithmétique; mais par rapport à l'arrangement des termes, vous suivrez les degrés d'une lettre commune au dividende & au diviseur: par exemple, on vous

propose de diviser $c^3 + 3cy^2 - y^3 - 3c^2y$ par $c - y$.

OPÉRATION.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
c^3 & -3c^2y & +3cy^2 & -y^3 & c-y \\
-c^3 & +c^2y & & & \overline{c^2 - 2cy + y^2} \\
\hline
* & -2c^2y & +3cy^2 & & \\
 & +2c^2y & -2cy^2 & & \\
\hline
 & * & +cy^2 & -y^3 & \\
 & & -cy^2 & +y^3 & \\
\hline
 & & * & * & \\
\hline
\end{array}
$$

Arrangez les termes du dividende suivant les degrés de la lettre c (on pourroit aussi prendre la lettre y), c'est-à-dire, mettez à la première place le terme où la lettre c est élevée au plus haut degré; c'est le terme c^3 : écrivez ensuite le terme où la lettre c est élevée à un degré immédiatement plus bas : on voit que c'est le terme $-3c^2y$; continuez cet arrangement jusqu'à la fin. Le dividende ainsi ordonné sera $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. On ordonnera aussi les termes du diviseur par rapport aux degrés de cette lettre, en cas qu'elle en ait plusieurs; comme elle n'en a pas dans cet exemple, le diviseur est tout ordonné.

Après cette préparation, vous diviserez le premier terme c^3 du dividende par le premier terme c du diviseur, & vous écrirez c^2 au quotient; multipliant ensuite tout le diviseur par c^2, vous en soustrairez le produit $c^3 - c^2y$ du dividende; ce qui se fait en écrivant sous le dividende les termes de ce produit avec des signes contraires : on tire une

ligne, & l'on fait la réduction des grandeurs semblables. A côté du reste $- 2 c^2 y$, on descend le troisième terme $+ 3 c y^2$ qui n'a point été réduit; & l'on continue à diviser le premier terme $- 2 c^2 y$ de ce second membre par le premier terme c du diviseur; ce qui donne $- 2 c y$ que l'on écrit au quotient : on multiplie tout le diviseur par ce nouveau terme, & l'on en soustrait le produit du second membre à diviser, comme l'on a fait dans la première opération. Il reste $+ c y^2$, à côté duquel on place le dernier terme $- y^3$ du dividende : on divise toujours le premier terme $+ c y^2$ de ce troisième membre par le premier terme c du diviseur; il vient au quotient $+ y^2$, par lequel on multiplie tout le diviseur, dont on retranche le produit à l'ordinaire de la quantité qui restoit à diviser; & comme il ne reste rien, on voit que la division se fait exactement. Ainsi la quantité $c^2 - 2 c y + y^2$ est le véritable quotient. La preuve en est, qu'en multipliant le quotient $c^2 - 2 c y + y^2$ par le diviseur $c - y$, on retrouve le dividende $c^3 - 3 c^2 y + 3 c y^2 - y^3$.

On peut remarquer deux choses; 1°. que le procédé de la division Algébrique est tout-à fait semblable à celui de la division Arithmétique. 2°. Que l'on ne divise jamais qu'un monôme par un monôme à chaque opération : ainsi, au fond, la division des polinômes n'est pas plus difficile que celle des monômes. Ce qui paroît y ajouter quelque différence, c'est la multiplication de chaque terme du quotient par tout le diviseur, qui donne un produit qu'il faut retrancher du dividende à chaque opération, afin que l'on sçache ce qui reste à diviser; mais la division Arithmétique tient précisément la même conduite; ainsi cette opération ne prescrit rien de nouveau.

Quant à l'arrangement des termes par rapport aux

degrés d'une certaine lettre, que nous appellerons dans la suite *lettre d'origine*, voici à quoi l'on doit faire attention. Lorsqu'un dividende est divisible par une quantité, cette quantité est nécessairement une des racines qui ont concouru à produire le dividende par voie de multiplication; mais la production du dividende par voie de multiplication n'a pu se faire, sans donner différens degrés à quelques lettres communes au multiplicande & au multiplicateur, lorsque l'un & l'autre est composé de différens termes : ainsi comme ces lettres ont été élevées à différens degrés par la multiplication, on doit les faire descendre par la division dans le même ordre où elles peuvent être montées; ce qui rend la division plus commode. Si l'on négligeoit cet arrangement, on pourroit souvent se persuader qu'une division est *infaisable*, quoique les termes de cette division, ordonnés comme il faut, puissent donner un quotient exact.

Pour diviser le polinôme $9\,a\,b^2 + 6\,a^3 - 15\,a^2\,b$ par $-3\,a\,b + 2\,a^2$, on arrangera les termes, comme on le voit dans l'opération, selon les degrés de la lettre d'origine a qui paroît dominer.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{rrr|l} 6\,a^3 & -15\,a^2\,b & +9\,a\,b^2 & 2\,a^2 - 3\,a\,b \\ \cline{4-4} -6\,a^3 & +9\,a^2\,b & & 3\,a - 3\,b \\ \hline * & -6\,a^2\,b & +9\,a\,b^2 & \\ & +6\,a^2\,b & -9\,a\,b^2 & \\ \hline & * & * & \end{array}$$

Et divifant le premier terme $6a^3$ du dividende par le premier terme $2a^2$ du divifeur, on écrit $3a$ au quotient, par lequel on multiplie tout le divifeur: le produit qui en réfulte eft retranché du dividende, & l'on continue à divifer le refte, comme ci-deffus : le quotient total doit être $3a - 3b$. Ce que l'on vérifiera en multipliant ce quotient par le divifeur $2a^2 - 3ab$, dont le produit doit redonner le dividende.

S'il s'agit de divifer $8cx^2 + 15bds - 10bdx - 12csx - 3fg$ par $4cx - 5bd$;

On ordonnera les termes du dividende & du divifeur fuivant les degrés de la lettre d'origine x: comme il y a deux termes au dividende où cette lettre eft élevée au même degré, on pourra écrire ces deux termes l'un fous l'autre, de même que les deux termes où la lettre d'origine ne fe trouve pas.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{rr|l}
8cx^2 - 10bdx + 15bds & & \underline{4cx - 5bd} \\
- 12csx - 3fg & & 2x - 3s - \dfrac{3fg}{4cx - 5bd} \\
-8cx^2 + 10bdx & & \\
\hline
* - 12csx + 15bds & & \\
- 3fg & & \\
+ 12csx - 15bds & & \\
\hline
* - 3fg & & \\
\hline
\end{array}$$

En divifant donc le premier terme $8cx^2$ du dividende par le premier terme $4cx$ du divifeur, le quotient eft $2x$, par lequel on multiplie tout le divifeur; ce qui donne $8cx^2 - 10bdx$ que l'on écrit fous le dividende, en changeant les fignes de ce produit, comme on le voit exécuté dans l'opé-

ration : la réduction étant faite, on opère sur le reste $-12csx+15bds$, en divisant toujours le
$-3fg$
premier terme $-12csx$ de ce reste par le premier terme $4cx$ du diviseur, dont le quotient est $-3s$, par lequel on multiplie tout le diviseur, pour en retrancher le produit de ce qui est resté après la première division ; & l'on a un second reste $-3fg$, lequel n'ayant point de racines communes avec le diviseur, fait voir que la division ne sçauroit se faire exactement ; ainsi on le disposera à la suite du quotient, au dessus d'une petite ligne, sous laquelle on écrira le diviseur.

Les Commençans pourroient se trouver embarrassés, en cherchant le quotient qui vient de la division de $C^2R^2 - Ccr^2$ par $CR - Cr$, opération que l'on sera obligé de faire au n°. 388. *Tome* 2. Je vais donc l'expliquer ici par anticipation, pour avoir le droit de m'en dispenser alors ; d'autant plus qu'en cet endroit-là le détail d'une division paroîtroit tout-à-fait déplacé.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{r} C^2R^2 - C\quad cr^2 \\ -C^2R^2 + C^2Rr \end{array} & \dfrac{CR - Cr}{CR + Cr + \frac{Cr^2}{R} = cr} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{\quad * \quad + C^2Rr - Ccr^2} \\ \quad\quad\;\; - C^2Rr + C^2r^2 \\ \overline{\quad\quad\quad * \quad + C^2r^2 - Ccr^2 \quad (B)} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; - C^2r^2 + Ccr^2 \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad * \quad\quad * } \end{array}$$

Après avoir trouvé les deux premiers termes

C R + C r du quotient, suivant les règles ordinaires de la division Algébrique, on arrivera au dernier reste $+ C^2 r^2 - C c r^2$ qu'il faut continuer à diviser par C R — C r, ce qui donnera au quotient le dernier terme $+ \frac{C r^2}{R}$; mais comme $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$ (ainsi qu'il sera démontré au n°. 388, *Tom.* 2.), on aura $+ \frac{C r^2}{R} = + c r$; & multipliant tout le diviseur par $+ \frac{C r^2}{R}$, on aura $+ C^2 r^2 - \frac{C^2 r^3}{R}$, que l'on écrira, avec des signes contraires, sous le reste $+ C^2 r^2 - C c r^2$ de la division, & tout s'évanouira, si l'on suppose que $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$, comme cela arrivera à la page 305. *Tome* 2. après le n°. 388; car si dans le dernier produit $\frac{C^2 r^3}{R}$ on substitue $\frac{c}{r}$ à la place de $\frac{C}{R}$, on aura $C c r^2$, & par conséquent tout se détruira.

Des Fractions Algébriques.

65. Comme on doit suivre dans le calcul de ces fractions les mêmes règles que nous avons prescrites par rapport aux fractions Arithmétiques, dont nous avons démontré les opérations avec beaucoup d'exactitude; on se dispensera ici de répéter toutes les raisons sur lesquelles le calcul des fractions est fondé; il suffit d'en voir la façon Algébrique.

De l'Addition des Fractions Algébriques.

1°. Si ces fractions ont la même dénomination, on fera une somme de tous les numérateurs, & l'on posera sous cette somme le dénominateur commun. Ainsi $\frac{ab}{c} - \frac{ds}{c} + \frac{fm}{c} = \frac{ab - ds + fm}{c}$. De même

$\frac{ps}{bb} - \frac{2gm}{bb} - \frac{4r}{bb} = \frac{ps - 2gm - 4r}{bb}$.

2°. Quand les fractions Algébriques n'ont pas une même dénomination, on la leur donne, suivant les règles établies au chapitre du calcul des fractions numériques (n°. 38.). Ainsi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

De même $\frac{f}{g} - \frac{p}{s} - \frac{m}{x} + \frac{r}{t} = \frac{fstx}{gstx} - \frac{gptx}{gstx} - \frac{gmst}{gstx} + \frac{grsx}{gstx} = \frac{fstx - gptx - gmst + grsx}{gstx}$. On voit donc que l'addition des fractions Algébriques, qui n'ont pas un même dénominateur, se fait en les réduisant d'abord à la même dénomination ; après quoi on fait une somme de leurs numérateurs, sous laquelle on pose le dénominateur commun.

De la Soustraction des Fractions Algébriques.

66. Pour ôter $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{b}$, écrivez $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}$; c'est-à dire, que pour trouver la différence entre deux fractions de même dénomination, on détermine la différence des numérateurs, sous laquelle on écrit le dénominateur commun.

Les fractions qui n'ont pas une même dénomination, & dont on cherche la différence, doivent être réduites d'abord à un même dénominateur : cette préparation étant faite, on en détermine la différence en retranchant, comme ci-dessus, le numérateur du numérateur ; & l'on écrit sous le reste le dénominateur commun : ainsi la différence de $\frac{b - c}{d}$

à la fraction $\frac{r}{s}$ se trouve en écrivant $\frac{b-c}{d} - \frac{r}{s}$ $= \frac{bs-cs}{ds} - \frac{dr}{ds} = \frac{bs-cs-dr}{ds}$.

De la Multiplication des Fractions Algébriques.

67. On multipliera les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs par les dénominateurs ; la fraction qui résultera de ces produits, sera le produit cherché. Ainsi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. De même $\frac{a-b}{m} \times \frac{a-b}{p} = \frac{aa-2ab+bb}{mp}$. Pareillement $\frac{2s-r}{f}$ $\times \frac{d}{c-a} = \frac{2ds-dr}{cf-af}$.

De la Division des Fractions Algébriques.

68. La division des Fractions Algébriques se fait comme celle des fractions numériques, c'est-à-dire, que l'on multiplie le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur : le produit qui en vient doit faire le numérateur du quotient cherché, & son dénominateur sera le produit du dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur. Par conséquent la fraction $\frac{b}{s}$ divisée par la fraction $\frac{c}{d}$ $= \frac{b}{s} \times \frac{c}{d} = \frac{b \times d}{c \times s} = \frac{bd}{cs}$, en multipliant en sautoir.

Si l'on divise $\frac{2b-d}{-f}$ par $\frac{c-m}{p}$, il faudra écrire $\frac{2b-d}{-f} \times \frac{c-m}{p} = \frac{\overline{2b-d} \times p}{-f \times \overline{c-m}} = \frac{2bp-dp}{-cf+mf}$.

En un mot, la seule différence qu'il y a entre les opérations des fractions Algébriques, & celles que l'on fait sur les fractions numériques, consiste dans la manière dont les signes + & — agissent les uns sur les autres : dans tout le reste le procédé est

précisément le même. Ainsi qui connoît une de ces deux façons, connoît aussi l'autre.

69. On ne voit pas encore à quoi aboutit ce calcul ; toutes ces combinaisons de lettres n'ont produit que des résultats indéterminés, d'où il ne paroît pas que l'on puisse retirer la moindre utilité. Cependant il est plus que vraisemblable que les Règles d'Arithmétique un peu compliquées ont été découvertes par ce moyen. On verra en Géométrie combien il est avantageux de pouvoir déterminer les racines qui ont concouru à former un produit ; & nous allons éprouver ici l'excellence du calcul Algébrique pour la détermination de ces racines.

La méthode la plus palpable & la plus lumineuse de trouver les quantités qui composent un produit par voie de multiplication, est de prendre ces quantités avant leur composition, & de bien examiner ce qui leur arrive, quand on vient à les composer suivant certaines conditions données : car en faisant précisément le contraire de ce que l'on a fait dans la composition, les quantités doivent reparoître dans leur premier état ; l'art de retrouver ces produisans ou ces racines, s'appelle *Analyse* ou *décomposition*.

Un nombre que l'on décompose, ou dont on fait l'analyse, ressemble parfaitement à une machine que l'on démonte pour en reconnoître les différentes pieces : celui qui sçait monter la machine, peut la démonter avec une extrême facilité ; comme il en connoît les différentes pieces, leur engrainure & leurs limites, il voit aussi à chaque pas la direction qu'il doit donner à ses mouvemens, & le degré de force qu'il y faut employer : sans cette connoissance préliminaire, il se trouve livré à un tâtonnement perpétuel, & toujours exposé à une confusion qui ne permet plus de rien reconnoître à la machine.

Dans la décomposition des grandeurs numériques

il y a un très-grand inconvénient : on n'y voit point les pieces ou les quantités qui les composent : elles sont enveloppées dans le total. Quand je multiplie 9 par 4, j'ai 36, où 9 & 4 ne paroissent plus : de sorte que si on me demandoit les racines de 36, je ne pourrois pas déterminer précisément comment ce nombre 36 a été formé ; car il est non-seulement le produit de 4 par 9, mais il peut être celui de 18 par 2, de 12 par 3, de 6 par 6, ou même de 36 par 1.

Mais les grandeurs Algébriques sont toujours présentes dans un produit ; lorsqu'elles se multiplient, elles ne disparoissent pas comme les grandeurs numériques : elles laissent voir l'artifice de leur composition ; & par conséquent elles en montrent l'analyse qui doit agir en sens contraire.

Multiplions $2a$ par c ; le produit $2ac$ nous montre qu'il n'y a point d'autres grandeurs qui aient concouru à le former, que celles que l'on y apperçoit : le calcul Algébrique est donc fort propre à trouver les règles de la composition & de l'analyse ; c'est pourquoi nous allons d'abord nous servir de ce calcul, & nous appliquerons aux quantités numériques les règles qu'il nous fera découvrir.

De la génération des puissances Algébriques, & de leur Analyse ; ou de la Résolution de ces puissances en leurs racines.

70. *La première puissance* ou le premier degré d'une grandeur, par exemple, de la quantité a, est cette quantité elle-même. Le produit de cette quantité par elle-même, ou a^2, est la *seconde puissance* de a, que l'on appelle quelquefois *second degré*, ou encore son *quarré*. La *troisième puissance* de a est le produit de sa première puissance a par sa seconde puissance a^2 ; ce qui produit a^3, qui est aussi

appellé *le troisième degré* ou le *cube* de la quantité a, &c. Il est donc facile d'élever une grandeur à une puissance quelconque, puisqu'il ne s'agit que de la multiplier par elle-même autant de fois qu'il en est besoin.

La quantité dont la multiplication continuelle a produit une puissance ou un degré, est appellée la *racine de ce degré ;* ainsi a est la racine seconde, ou la racine quarrée de a^2.

La quantité a est aussi la racine troisième, ou la racine cubique de a^3.

En général la racine quarrée d'une quantité est une grandeur, laquelle étant multipliée par elle-même, redonne la grandeur dont elle est racine ; ainsi 3 est la racine quarrée de 9, parce que $3 \times 3 = 9$.

De même la racine troisième ou cubique d'un nombre, est une quantité qui redonne le nombre proposé, lorsqu'elle est multipliée par son quarré. Le nombre 4 est la racine cubique de 64 : car si l'on multiplie le quarré de $4 = 16$ par 4, on retrouve le nombre proposé 64.

71. Quand une puissance Algébrique est un monôme, la racine en est toujours fort aisée à trouver, de quelque nombre de lettres que ce monôme soit composé. On voit tout d'un coup que la racine quarrée de $aacc$ ou de a^2c^2 est ac ; puisque $ac \times ac = a^2c^2$. Il n'est pas plus difficile de s'appercevoir que la racine cubique de b^3c^3 est bc ; car $bc \times bc \times bc = b^3c^3$. Ainsi quand on s'apperçoit que les exposans d'un monôme sont du même degré que la racine que l'on propose d'extraire, on supprime les exposans, & l'on écrit les lettres pour la racine.

72. Mais si quelques lettres du monôme, dont il s'agit d'extraire la racine, avoient un exposant

d'un degré plus petit que celui de la racine, on ne pourroit jamais trouver cette racine au juste. La racine quarrée de $a^2 c$ n'est pas déterminable à la rigueur, c'est à-dire, qu'il n'y a point de quantité Algébrique, laquelle multipliée par elle-même puisse donner exactement la quantité $a^2 c$; & ceci ne doit pas surprendre : la racine quarrée du nombre 7 n'est pas plus déterminable que la racine quarrée de $a^2 c$; cette racine ne peut être ni 2 ni 3, puisque $2 \times 2 = 4$ plus petit que 7, & $3 \times 3 = 9$ plus grand que 7 : la racine quarrée de 7 est donc entre 2 & 3, & par conséquent, si on pouvoit la déterminer, elle seroit 2 & quelque partie de l'unité : or il n'est pas possible que la racine quarrée de 7 soit 2 accompagné de quelque fraction, parce qu'en multipliant cette racine par elle-même, on devroit retrouver le nombre entier 7; mais on ne peut jamais trouver un entier, quand on multiplie une fraction par elle-même; car supposons cette fraction réduite à ses plus simples termes, alors son numérateur, ou, ce qui est la même chose, le dividende n'aura aucune racine commune avec le dénominateur ou le diviseur : ainsi en multipliant cette fraction par elle-même, comme on n'introduit point de nouvelles racines par cette multiplication, son produit est encore une fraction, dont le numérateur & le dénominateur, ou, ce qui revient au même, dont le dividende & le diviseur n'ont aucunes racines communes. Mais pour avoir un entier au quotient, c'est-à-dire, pour avoir un quotient qui ne soit accompagné d'aucune fraction, il est nécessaire que le dividende puisse être divisé sans aucun reste; & afin que cette division ait lieu, il faut que le dividende & le diviseur aient des racines communes; ce qui n'étant pas, c'est une nécessité que le quotient de cette division soit accompagné d'une fraction, & qu'ainsi

un nombre entier, qui n'a pas un entier pour sa racine quarrée, ne puisse pas aussi avoir une fraction pour cette même racine.

Il n'est donc pas possible que le quarré d'un nombre accompagné d'une fraction ne donne qu'un entier; ainsi la racine quarrée de 7 n'étant ni un nombre entier, ni un entier accompagné d'une fraction, il s'ensuit qu'il n'est pas possible de déterminer à la rigueur la racine quarrée de 7, ou de tout autre nombre entier qui n'a pas pour racine un autre nombre entier.

73. Ces racines indéterminables s'appellent des *incommensurables*, c'est-à dire, des quantités qui n'ont aucune commune mesure avec l'unité; il faut bien que cela soit: car si ces racines indéterminables avoient quelque commune mesure avec l'unité, ou avoient quelques parties de cette unité, elles seroient par cela même déterminées; ce que nous avons démontré impossible.

74. On dit que des grandeurs ont une commune mesure, quand elles sont réductibles en parties de même nom & de même valeur: 8 & 17 ont 1 pour commune mesure; car 1 répété 8 fois mesurera 8 exactement, & en le répétant 17 fois il sera au juste la mesure de 17. On peut aussi trouver une commune mesure aux nombres 3 & $\frac{2}{5}$. Réduisez-les à la même dénomination; vous aurez $\frac{15}{5}$ & $\frac{2}{5}$ dont la mesure commune est $\frac{1}{5}$ pris 2 fois d'une part & 15 fois de l'autre. Un nombre, de quelque nature qu'il soit, a donc toujours une commune mesure avec un autre nombre entier ou fractionné.

75. Quoiqu'il y ait des racines indéterminables, on a néanmoins trouvé un supplément à cette impossibilité; c'est d'approcher de la valeur de ces racines aussi près que le besoin l'exige, & même plus près, ainsi que nous le démontrerons plus bas.

76. On voit donc facilement si un monôme Algébrique a une racine quelconque, ou s'il n'en a pas : quant aux polinômes, la chose n'est pas si aisée ; ce n'est qu'à l'aide de la composition que nous pouvons en faire l'analyse. Multiplions donc $a + b$ par $a + b$; le produit $aa + 2ab + bb$ sera le quarré de $a + b$: où je remarque que le quarré d'un nombre Algébrique composé de deux quantités, contient, 1°. le quarré aa de la première a. 2°. Le double $2a$ de la première par la seconde $b = 2ab$. 3°. Enfin le quarré bb de la seconde b. Que l'on se rende attentif à cette composition : c'est là-dessus que sont fondées toutes les règles de l'analyse.

Elevons maintenant à son quarré la quantité $a + b + c$ qui a ces trois termes, c'est-à-dire, multiplions $a + b + c$ par $a + b + c$. Le produit sera $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$, ou $aa + 2ab + bb + \overline{2a + 2b} \times c + cc$. En considérant ce quarré, je vois qu'il renferme, 1°. le quarré $aa + 2ab + bb$ des deux premiers termes $a + b$. 2°. Le produit du double des deux premiers termes par le troisième $= \overline{2a + 2b} \times c$. Enfin le quarré cc du troisième terme c. Et en continuant de former le quarré d'une grandeur composée de quatre termes, on y trouveroit le quarré des trois premiers termes, ensuite le produit du double des trois premiers termes par le quatrième, & le quarré du quatrième.

77. Puisque nous sçavons comment se forme un quarré, essayons de trouver sa racine ; ce doit être en prenant une route opposée à celle de sa composition. Supposons qu'il s'agisse de retrouver la racine quarrée de la quantité Algébrique $9ss + 4ccxx - 12csx$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{l|l} 4c^2x^2 - 12csx + 9s^2 & 2cx - 3s \text{ racine} \\ -4c^2x^2 & \overline{4cx - 3s \text{ divis.}} \\ \hline \quad * & \\ \quad -12csx + 9s^2 & \\ \quad +12csx - 9s^2 & \\ \hline \quad\quad * \quad\quad * & \end{array}$$

Ordonnons les termes suivant les degrés de la lettre d'origine x, comme l'opération l'indique ; & puisque (n°. 76.) le premier terme d'un quarré est un quarré, prenons la racine quarrée du premier terme $4c^2x^2$: c'est $2cx$, que nous écrirons à l'endroit où doit être placée la racine : quarrons ce premier terme de la racine, nous aurons $4c^2x^2$ que l'on retranchera du quarré dont on extrait la racine, en le plaçant sous le premier terme avec un signe contraire. Après la soustraction, il restera $-12csx+9s^2$.

Il s'agit présentement de trouver le second terme de cette racine ; mais nous sçavons par la composition du quarré (n°. 76.) que ce second terme est multiplié par le double du premier terme de la racine : ainsi doublons le premier terme $2cx$; nous aurons $4cx$; & divisons par ce terme ainsi doublé le premier terme $-12csx$ de ce qui nous reste : nous devons trouver le second terme de la racine ; car la division agit en sens contraire de la multiplication. En effet $-12csx$ divisé par $4cx$ donne $-3s$, que l'on écrira à la racine, & à côté du diviseur $4cx$; & multipliant $4cx - 3s$ par $-3s$, on en posera le produit $-12csx+9ss$ avec

avec des signes contraires sous les deux termes $-12csx+9ss$; & comme il ne reste rien après la réduction de ces quantités, on voit que la racine quarrée de la quantité proposée est $2cx-3s$. Ce que l'on prouvera, en multipliant la racine $2cx-3s$ par elle-même; car on retrouvera le quarré proposé.

On a mis à côté du diviseur $4cx$ le second terme $-3s$ de la racine, afin d'avoir aussi le quarré de ce second terme à retrancher du quarré dont on extrait la racine; parce que, suivant la composition d'un quarré qui a deux termes à sa racine (n°. 76.), outre le quarré du premier terme, & le produit du double du premier terme par le second, il y a encore le quarré de ce second terme.

Quand la racine aura plus de deux termes, on en trouvera toujours le suivant, en doublant les deux premiers termes de la racine, & divisant par ce double ce qui reste du quarré après les deux premières opérations.

EXEMPLE.

Vous cherchez la racine quarrée de la quantité Algébrique $aa+2ad+dd-2ac-2dc+cc$.

OPÉRATION.

$$
\begin{array}{lllll|l}
aa & +2ad & +dd & -2ac & & \quad a+d-c \\
-aa & & & -2dc & & \quad \overline{} \\
\overline{} & & & +cc & & \quad 2a+d \\
* & +2ad & +dd & & & \quad 2a+2d-c \\
 & -2ad & -dd & & & \\
\hline
 & * & * & -2ac & & \\
 & & & -2dc & & \\
 & & & +cc & & \\
 & & & +2ac & & \\
 & & & +2dc & & \\
 & & & -cc & & \\
\hline
 & & & * & & \\
\hline
\end{array}
$$

Après avoir trouvé les deux premiers termes $a + d$ de la racine, comme ci-deſſus, je double ces deux premiers termes : il me vient $2a + 2d$, par lequel je diviſe le reſte $-2ac - 2dc + cc$ du quarré propoſé ; & comme je m'apperçois que $-2ac - 2dc = 2a + 2d \times -c$; il eſt clair qu'en diviſant ces deux termes par $2a + 2d$, il vient $-c$ à la racine : j'écris auſſi $-c$ à côté du diviſeur $2a + 2d$; & je multiplie $\overline{2a + 2d} \times -c$ par le dernier terme $-c$ de la racine : j'en retranche le produit du reſte $-2ac - 2dc + cc$; & il ne reſte rien : ainſi $a + d - c$ eſt la racine quarrée de la quantité propoſée, ce qui ſe prouve comme ci-deſſus.

Pour avoir le troiſième terme de la racine, nous avons doublé les deux premiers termes, dont le produit nous a ſervi à diviſer ce qui reſtoit après avoir trouvé les deux premiers termes ; parce que dans la

composition du quarré qui a trois termes à sa racine, nous avons vu (n°. 76.) que ce quarré contenoit non-seulement le quarré des deux premiers termes, mais encore le produit du double des deux premiers termes par le troisième, & le quarré de ce troisième. Ainsi après avoir déterminé les deux premiers termes de la racine, on voit qu'il faut diviser ce qui suit par le double des deux premiers termes de la racine, afin de dégager ce troisième terme enveloppé dans la multiplication du double des deux premiers termes.

La décomposition, ou l'analyse des grandeurs, s'appelle vulgairement l'*extraction des racines.*

L'opération précédente est une extraction de racine quarrée Algébrique; elle va nous servir de modèle pour la racine quarrée des quantités numériques.

Extraction de la Racine quarrée des nombres.

78. Commençons par former les quarrés de tous les chiffres.

Table des quarrés de tous les chiffres depuis 1 jusqu'à 9.

Racines	Quarrés
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

Cette table fait voir que le quarré de 1 = 1; car

1×1 produit 1. Le quarré de $2 = 4$, puiſque $2 \times 2 = 4$; ainſi 2 eſt la racine quarrée de 4 : 5 eſt auſſi la racine quarrée de 25 : car $5 \times 5 = 25$, &c.

Conſidérez qu'une quantité qui n'a que 2 chiffres, ne peut pas avoir plus d'un chiffre à ſa racine; ainſi 99 n'a pas deux chiffres à ſa racine, quelque petits qu'on puiſſe les ſuppoſer : car la plus petite quantité qui ait 2 chiffres eſt 10; or 10 n'eſt pas la racine quarrée de 99 : car $10 \times 10 = 100$, plus grand que 99. D'où l'on voit qu'un nombre compoſé de trois chiffres aura néceſſairement deux chiffres à ſa racine; mais il n'en aura jamais trois. La plus petite quantité à trois chiffres eſt 100; or $100 \times 100 = 10000$, qui eſt un nombre compoſé de cinq chiffres. Ainſi tous les nombres depuis 100 juſqu'à 10000 excluſivement, ne pourront avoir que deux chiffres à leur racine : par exemple, la racine quarrée du nombre 9999 n'aura pas trois chiffres, puiſque le quarré des trois plus petits chiffres que l'on puiſſe ſuppoſer, donnera un produit plus grand que 9999; il faut donc qu'une quantité ſoit exprimée au moins par cinq chiffres pour avoir trois chiffres à ſa racine; & elle n'en aura jamais quatre, puiſque le nombre 1000, compoſé des quatre chiffres les plus petits, produit à ſon quarré 1000000, nombre compoſé de ſept chiffres : ainſi tous les nombres compris entre 10000 & 1000000 excluſivement ne pourront avoir que trois chiffres à leur racine. Si l'on continue cette manière d'enviſager la formation des quarrés, on reconnoîtra que la racine d'un nombre compris entre 1000000 & 100000000 excluſivement ne pourra contenir plus de quatre chiffres, &c.

En réſumant donc ce que nous venons de démontrer, toute puiſſance au-deſſus d'un chiffre, mais au-deſſous de trois, ne pourra avoir qu'un

chiffre à sa racine : quand elle sera au dessus de trois chiffres, mais au-dessous de cinq, sa racine n'en pourra contenir que deux ; au-dessus de cinq, mais au-dessous de sept, elle n'en pourra contenir que trois, & ainsi de suite, en prenant pour limites les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. qui se surpassent toujours de deux.

Il est clair que si l'on me propose d'extraire la racine quarrée du nombre 21025, je puis déterminer d'abord le nombre des chiffres dont sa racine sera composée ; car par la formation des puissances, un nombre composé de cinq chiffres aura nécessairement trois chiffres à sa racine.

Pour déterminer maintenant ces trois chiffres, formons un quarré numérique quelconque sur le modèle de la formation Algébrique ; élevons au quarré le nombre 321 : par la méthode Arithmétique, on en multiplieroit successivement les trois nombres par chaque nombre dont il est composé, & par conséquent on y distingue trois parties qui sont 300 + 20 + 1 ; ainsi pour élever ce nombre à son quarré par la méthode Algébrique, prenez un quarré Algébrique dont la racine ait trois termes, comme $a + b + c$, dont le quarré est $aa + 2ab + bb + \overline{2a + 2b} \times c + cc$, que j'appellerai dans la suite *formule Algébrique ;* & supposez que 300 soit représenté par a, que 20 le soit par b, & 1 par c.

Formation Algébrique du quarré du nombre 321, ou
300 + 20 + 1.

90000	. . . .	aa
12000	. . . .	$+ 2ab$
400	. . . .	$+ bb$
640	. . . .	$\overline{2a + 2b} \times c$
1	. . . .	$+ cc$
10|30|41		

Suivant la formule, je dois prendre la quarré du premier terme 300 = 90000. Ensuite le produit du double du premier terme par le second, c'est-à-dire, 2 fois 300 × 20 = 12000. Après cela le quarré du second terme ou 20 × 20 = 400. Et puis le produit du double de la somme des deux premiers termes par le troisième terme, c'est-à-dire, 2 fois $\overline{300 + 20} \times 1$ = 640. Enfin le quarré du troisième terme = 1; & faisant l'addition de tous ces produits, je trouve par cette méthode que le quarré du nombre 321 est 103041, ainsi qu'on le trouveroit en multipliant à l'ordinaire 321 par 321 : mais voici les avantages que l'on retire de cette formation Algébrique; c'est que l'on peut déterminer exactement où l'on trouvera chaque terme de la racine.

Car, 1°. le quarré 103041, composé de six chiffres, doit avoir trois termes à sa racine (p. 196); je puis donc, pour ma commodité, le couper en trois tranches, dont chacune renferme deux chiffres, en commençant de la droite vers la gauche, afin d'avoir un signe perpétuel qui m'indique combien il y aura de chiffres à la racine.

2°. En faisant réflexion à la formation du quarré numérique 10|30|41, dont la racine est 321, j'observe que le quarré du premier terme 3 de ma racine doit être précédé de quatre zéros, puisqu'il est effectivement 90000, & qu'ainsi je dois trouver le premier terme de ma racine dans une place qui soit précédée de quatre chiffres; je le trouverai donc dans les deux chiffres 10 de ma première tranche, qui est précédée des quatre chiffres 3041.

Pour sçavoir où je trouverai le second terme de ma racine, j'observe encore que ce second terme 2 étant multiplié par le double 6 du premier terme 3, le produit 12 qui en résulte a devant lui trois chiffres : car ce produit étant 20 × 2 fois 300 = 12000. On voit que 12 est précédé de trois chiffres; & par conséquent on doit trouver le second terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre 3 de la seconde tranche, qui est précédé des trois chiffres 041. Enfin le troisième terme 1 étant multiplié par le double de la somme des deux premiers termes 300 & 20, c'est-à-dire par le double de 320 = 640, le produit est 640 qui est précédé d'un zéro; & par conséquent on trouvera le dernier terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre 4 de la troisième tranche qui est précédé d'un chiffre.

EXEMPLE.

Soit donc proposé d'extraire la racine quarrée du nombre 21025.

OPÉRATION.

2 | 1 0 | 2 5	1 4 5 . . Racine.
1 1 0	2 4 . . Diviseur.
9 6	2 8 5
1 4 2 5	
1 4 2 5	
. . .	

Je le partage en tranches qui renferment deux chiffres, en commençant de la droite vers la gauche; & par le nombre des tranches, je juge d'abord que la racine de ce nombre sera exprimée par trois chiffres, quoique la première tranche n'en contienne qu'un, parce qu'il peut très-bien arriver, comme dans cet exemple, qu'un quarré soit exprimé par un seul chiffre : ainsi sa racine quarrée doit se trouver dans ce chiffre seul.

Ensuite étant prévenu par la formation des puissances, ou plutôt par la formation des quarrés numériques, que la première tranche renferme le quarré du premier terme de la racine que je cherche, j'extrais donc la racine quarrée du premier nombre 2, & j'écris 1 à la racine. J'ôte le quarré de 1 du nombre 2 de la première tranche : il me reste 1, à côté duquel je descends toute la seconde tranche 10; & je mets un point sous le premier chiffre 1 de cette tranche, pour indiquer que c'est-là où je dois borner ma division; & comme le se-

cond terme que je cherche est multiplié par le double du premier terme 1 de ma racine, je double 1, & j'écris 2 sous la ligne du côté de la place des racines. Je divise 11 par 2. Le quotient 5 que je trouve d'abord étant trop fort je ne mets que 4 à la racine à côté de 1; je le place aussi à côté du diviseur 2; & je multiplie 24 par 4; j'en retranche le produit 96 de 110, & il me reste 14. A côté de ce reste je descends la troisième tranche 25, ayant soin de mettre un point sous le premier nombre 2 de cette tranche; ce qui m'indique que je dois trouver le troisième terme de la racine dans 142; or nous sçavons que ce troisième terme est multiplié par le double des deux premiers termes de la racine; divisons donc 142 par le double de 14 ou par 28; on ne trouve que 5. J'écris ce nombre à la racine; je le place aussi à la suite du diviseur 28: je multiplie par 5 ce diviseur ainsi augmenté; & j'en retranche le produit 1425 du reste 1425: comme il ne me reste rien, je vois que la racine exacte de 21025 est 145. On le prouve, en multipliant 145 par 145; car on trouve le quarré 21025.

Remarquez qu'après avoir trouvé le premier chiffre 1 de la racine 145, je quarre ce chiffre, & je l'ôte de la première tranche, à cause que cette tranche doit contenir le quarré du premier terme de ma racine; & pour en déterminer le second, à côté du reste de ma première tranche, j'abaisse toute la seconde tranche 10, & je mets un point sous le premier chiffre 1 de cette tranche, parceque je dois trouver le second terme de ma racine sans aller plus loin que le premier chiffre de la seconde tranche (p. 197.); mais comme ce second terme que je cherche est nécessairement multiplié par le double du premier terme que j'ai déja trouvé, il faut donc que je divise par le double de ce

premier terme, c'est à dire par 2, les chiffres 11 où ce second terme est contenu : car la division étant opposée à la multiplication, elle fera disparoître le nombre qui multiplie le terme que je cherche ; j'écris donc ce terme 4 ainsi dégagé à la racine, je l'écris aussi à côté du diviseur 2 qui m'a fait trouver ce terme, & je multiplie ce diviseur ainsi augmenté, qui est alors 24, par ce même terme 4 ; ce qui me produit 96, c'est à-dire, le double du premier terme de la racine multiplié par le second, plus le quarré du second : j'ôte ce produit non-seulement des chiffres 11 qui ont servi de dividende, mais des trois chiffres 110, parce que la seconde tranche contient non seulement le double du premier terme de la racine multiplié par le second, mais encore le quarré du second, &c.

Comme les autres termes de la racine se trouvent en suivant précisément la même méthode, on peut appliquer aux opérations suivantes tout ce que nous venons de dire sur la manière de trouver le second terme d'une racine quarrée ; & l'on verra que l'extraction des racines suit précisément une voie opposée à la formation de leurs puissances. Il est donc d'une extrême importance d'examiner bien attentivement ce qui arrive à une grandeur élevée à un degré ou à une puissance quelconque : car si vous voulez la faire descendre du degré où elle est montée (ce qui s'appelle en extraire la racine), elle reviendra dans son premier état par la même route ; mais en sens contraire : elle s'est élevée par la multiplication ; elle s'abaissera donc par la division. Or c'est ce que nous avons exécuté ; ainsi nous avons dû retrouver & nous avons retrouvé en effet la racine dont la puissance s'étoit formée.

Autre Exemple d'une extraction de Racine quarrée.

On demande de trouver la racine quarrée de la quantité 103641.

OPÉRATION.

10|30|41	3 2 1 . . . Racine.
9	6 2
1 3 0	6 4 1 . . Diviseurs.
1 2 4	
6 4 1	
6 4 1	
. . .	

Après l'avoir partagée en tranches qui contiennent chacune deux chiffres (en commençant les sections, de la droite vers la gauche, parcequ'il peut arriver que la tranche la plus à la gauche ne contienne qu'un chiffre, comme nous l'avons déja fait remarquer); j'extrais la racine quarrée de la première tranche 10, & je trouve 3 que j'écris à la racine. Je quarre 3, j'ai 9 que j'ôte de ma première tranche 10; il me reste 1 à côté duquel je descends la seconde tranche 30: je pose un point sous le premier chiffre 3 de cette seconde tranche. Ensuite je double le premier terme 3 de ma racine; j'écris 6 sous la ligne, & divisant 13 par 6, il me vient 2 que j'écris à la racine & à côté de 6; je multiplie 62 par 2, c'est-à-dire, par le terme que je viens de trouver, j'ai 124 que j'ôte de 130, il me reste 6, à côté duquel je descends la troisième tranche

41, en mettant un point sous le premier terme 4 de cette troisième tranche; je double ensuite les deux termes 32 de ma racine, j'ai 64, par lesquels je divise 64; le quotient est 1 que j'écris à la racine, & à côté de 64 : multipliant ensuite 641 par le terme 1 que je viens de trouver, j'ôte ce produit de 641, il ne reste rien. Ainsi le nombre 321 est la racine quarrée que je cherche.

Il y a des cas où l'on doit écrire un zéro à la racine.

EXEMPLE.

Quelle est la racine quarrée du nombre 25401600?

OPÉRATION.

25|40|16|00	5040
25	10
4016	1004
4016	1008
00	

Je le partage en tranches, comme ci-dessus, & je dis : la racine quarrée de 25 est 5 que j'écris à la racine. Quarrant 5, j'ai 25 que j'ôte de la première tranche 25, & il ne reste rien. Je descends toute la seconde tranche 40, en mettant un point sous le premier chiffre 4 de cette tranche, & après avoir doublé 5, j'ai 10 pour diviseur; ainsi je dis : en 4 combien de fois 10? il n'y est point du tout. J'écris donc 0 à la racine; je descends la troisième tranche 16, & je mets un point sous le chiffre 1 de cette tranche; cela m'indique que le dividende est 401. Je double les deux termes 50 de la racine;

j'ai 100 par lesquels je divise 401 ; le quotient est 4, je l'écris à la racine & à la suite de 100 ; je multiplie 1004 par ce nombre 4 que je viens de trouver ; j'en ôte le produit 4016 de 4016, il ne reste rien. Voyant enfin que la quatrième tranche ne contient que des zéros, j'écris encore o à la racine ; par conséquent la racine totale est 5040.

On ne trouve pas toujours une racine quarrée exacte. Le nombre 5079 n'étant pas un quarré parfait, n'aura pas une racine quarrée parfaite. On n'extrait alors la racine quarrée que du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

OPÉRATION.

```
 5 0|7 9   | 7 1 . . . Racine.
 4 9       | -----
 ---       | 1 4 1 . . . Diviseur.
 . 1 7 9
   1 4 1
 ---------
     3 8
 ---------
```

Coupez par tranches le nombre 5079, & dites : la racine quarrée de la première tranche 50 est 7 que j'écris à la racine. Je quarre 7, j'ai 49 que j'ôte de la première tranche 50, & il me reste 1 à côté duquel je descends toute la seconde tranche 79, en mettant un point sous son premier chiffre 7 ; après quoi je double le terme 7 de la racine que je viens de trouver ; j'ai 14 par lesquels je divise 17 ; il vient 1 que j'écris à la racine & à côté de 14. Je multiplie 141 par ce nombre 1 de la racine ; j'en soustrais le produit 141 de 179, & il me reste 38 dans lesquels je ne dois plus chercher aucuns chiffres pour la racine, parce qu'un nombre

composé de quatre chiffres ne sçauroit avoir trois nombres entiers à sa racine.

On prouve que l'on a bien opéré, en multipliant la racine 71 par 71 ; le produit 5041 que l'on trouve, joint au reste 38, étant égal au nombre proposé 5079, fait voir que l'on ne s'est pas trompé dans l'opération ; mais pour vous convaincre que le nombre 71 est, en nombres entiers, la plus grande racine quarrée que l'on puisse extraire du nombre 5079, augmentez cette racine 71 seulement de 1, qui est le plus petit entier possible, vous aurez 72 ; mais le quarré de 72 = 5184, nombre plus grand que la quantité proposée 5079, ainsi 72 ne sçauroit être une racine quarrée extraite du nombre 5079 ; par conséquent 71 est, en nombres entiers, la plus grande racine qui y soit contenue.

Cependant quoique l'on ne puisse pas trouver à la rigueur la racine quarrée d'un nombre entier qui n'est pas quarré (nº. 72.) on peut en approcher si près, que la différence de celle que l'on trouve, à la véritable, s'il y en avoit une, est plus qu'insensible.

Approximation à l'infini de la Racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré.

79. Considérez que, quand on extrait la racine quarrée d'un nombre comme 8, qui n'est pas un nombre quarré, il ne s'en faut jamais 1 que l'on n'en ait la véritable ; car en prenant 2 pour la racine quarrée de 8, on paroît fort éloigné de la grandeur que l'on cherche ; puisque 2 × 2 ne donne que 4 au lieu de 8, que l'on devroit retrouver si la racine étoit exacte ; cependant le nombre 2 n'est pas trop petit de la quantité 1 ; car si vous prenez 3 au lieu de 2, vous verrez que 3 est une

racine trop grande; car $3 \times 3 = 9$ plus grand que 8. Ainsi par la méthode que nous avons proposée d'extraire une racine quarrée d'un nombre quelconque, lorsque cette racine n'est pas exacte, elle n'est jamais éloignée de la quantité 1, de la véritable racine.

Mais il n'y a point de nombre que je ne puisse rompre en aussi petites parties que je voudrai. 1 peut devenir 1 dixième, 1 centième, 1 millionième, 1 cent billionième, &c. à l'infini. Le nombre qui n'est pas quarré, & dont j'extrais la racine quarrée, peut donc être divisé en parties telles qu'il ne s'en faudra pas 1 millième ou 1 cent millionième, &c. que je n'aie la véritable racine quarrée de ce nombre; or 1 cent millionième de pied, par exemple, est au-dessous de l'insensible; car 1 dix millième de pied n'est pas sensible, 1 cent millième l'est encore moins; 1 cent millionième est donc fort au-dessous de l'insensible; & par conséquent, supposant que l'on puisse exécuter ce que j'avance, on a une approximation qui va beaucoup au-delà de nos besoins.

Vous allez voir que cette approximation infinitésimale est la chose du monde la plus aisée à concevoir, & même à exécuter. Pour cela vous observerez, 1°. que l'on a la racine quarrée d'une fraction, en extrayant la racine quarrée de son numérateur & celle de son dénominateur; par exemple, la racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$: car $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; où vous voyez que la racine quarrée d'une fraction quarrée est une fraction dont le numérateur est la racine quarrée du numérateur, & le dénominateur est aussi la racine quarrée du dénominateur de la fraction dont on extrait la racine.

2°. Qu'une fraction comme $\frac{2}{3}$, dont le numérateur & le dénominateur ne sont pas des nombres

quarrés, peut devenir égale à une fraction dont le dénominateur soit un nombre quarré. Multipliez le dessus & le dessous de la fraction $\frac{2}{3}$ par son dénominateur 3, la nouvelle fraction $\frac{6}{9}$ a pour dénominateur le nombre quarré 9, & cette fraction $\frac{6}{9}$ est égale à la fraction $\frac{2}{3}$ (n°. 39.) : ainsi quand on extrait la racine quarrée d'une fraction dont le numérateur & le dénominateur ne sont pas des nombres quarrés, il n'y a jamais que le numérateur dont on ne puisse pas tirer exactement la racine quarrée, en faisant la transformation que nous venons de proposer.

Supposons maintenant que l'on nous propose d'extraire la racine quarrée du nombre 13, qui n'est pas un nombre quarré, & que l'on mette pour condition de trouver une quantité qui ne soit pas seulement de 1 millième au-dessous de la véritable racine, s'il y en avoit une.

Par la condition du problême ce sont donc des millièmes que je dois trouver à ma racine ; or pour trouver des millièmes à une racine, il faut que la puissance de cette racine soit composée de millioniémes, puisque la racine de 1000000, c'est-à-dire, d'un million, est 1000 ou mille. Il nous faut par conséquent réduire en millioniémes le nombre proposé 13, c'est-à-dire, que chaque partie de ce nombre doit devenir un million de fois plus petite, & contenir ainsi un million de parties : or si chaque unité de 13 est divisée en un million de parties ou contient un million de parties, les 13 unités contiendront 13 millions de parties qui seront alors des millioniémes ; on aura donc 13 millions de millioniémes ou $\frac{13000000}{1000000}$ dont il faut extraire la racine quarrée. Celle du dénominateur est 1000 ; reste donc à trouver celle du numérateur : on procédera à l'ordinaire, en coupant par tranches le nombre

bre 13000000, & l'on trouvera que la plus grande racine quarrée du numérateur proposé est 3605.

OPÉRATION.

13|00|00|00	3605 . . Racine.
9	66
400	72 . . Diviseurs.
396	7205
40000	
36025	
3975	

On mettra ce nombre au-dessus d'une petite ligne, sous laquelle on posera la racine quarrée 1000 du dénominateur 1000000, ensorte que la quantité $\frac{3605}{1000}$ sera une expression de la racine quarrée du nombre 13 si approchée, qu'il ne s'en faudra pas $\frac{1}{1000}$ ou 1 millième, que l'on n'ait ce qui étoit à trouver; car si au lieu de $\frac{3605}{1000}$ vous prenez $\frac{3606}{1000}$, qui n'est que d'un millième plus fort, vous aurez une racine quarrée trop grande, puisqu'en multipliant $\frac{3606}{1000}$ par $\frac{3606}{1000}$ vous trouverez le produit $\frac{13003236}{1000000} = 13 + \frac{3236}{1000000}$ qui est plus grand que 13.

En général, pour approcher de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré, on multipliera ce nombre par un quarré; mais afin qu'il ne change pas de valeur, on le divisera tout de suite par ce même nombre quarré; ensorte que ce nombre se produira alors sous la forme d'une fraction de même

valeur que le nombre entier : par exemple, multipliez 5 par 100, vous aurez 500; divisez le produit 500 par 100, il vous reviendra $\frac{500}{100} = 5$.

Dans l'extraction des racines, on préfère de multiplier par des nombres quarrés composés uniquement de l'unité suivie de plusieurs zéros, parce que la multiplication est faite sur le champ, en mettant seulement à la suite du nombre que l'on multiplie, tous les zéros qui sont au multiplicateur; un autre avantage, c'est que la division par ces sortes de nombres, où il n'y a que l'unité suivie de plusieurs zéros, se fait avec une extrême rapidité. Vous avez vu qu'en multipliant 13 par 1000000, on a mis simplement six zéros à la suite du nombre 13.

De même pour diviser 3605 par 1000, ôtez de 3605 autant de chiffres qu'il y a de zéros au diviseur, c'est-à-dire trois, en commençant de la droite vers la gauche, vous aurez tout d'un coup 3 pour quotient avec la fraction $\frac{605}{1000}$; ou simplement on mettra un point entre les nombres entiers, & ceux qui expriment une fraction : dans cet exemple on écriroit $\frac{3605}{1000} = 3.605$; tous les nombres les plus à la gauche, séparés par le point, marquent des entiers, & ceux qui sont à la droite du point signifient des nombres fractionnés de même dénomination que le diviseur. Ce sont des façons de calcul inventées pour aller plus vîte.

Avant de finir cet article, je ferai remarquer à ceux qui connoissent déja le calcul, que par ma manière de transformer un nombre entier en fraction, j'évite le calcul *des fractions décimales* qui apportent toujours quelque embarras aux Commençans, & dont je ne vois pas qu'ils retirent une grande utilité.

De l'extraction de la Racine cubique.

80. Nous nous conduirons dans cette opération, comme nous avons fait à l'égard de l'extraction de la racine quarrée : nous formerons un cube dont nous examinerons bien attentivement les parties, afin de découvrir l'artifice de leur formation. Cet artifice une fois bien conçu, l'extraction des racines n'offre plus aucune difficulté. Commençons par la formation d'un cube Algébrique. On sçait que le cube d'une quantité est le produit de cette même quantité par son quarré.

Soit donc la quantité $a + b$ élevée à son cube, c'est-à-dire, multiplions $a + b$ par $a + b$, nous aurons $aa + 2ab + bb$ qui est le quarré de $a + b$; ainsi pour en avoir le cube il faut multiplier ce quarré $aa + 2ab + bb$ par $a + b$, & l'on a au produit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cube dont la quantité $a + b$ est la racine.

En examinant les différents termes de ce cube, je vois qu'il est composé, 1°. du cube a^3 du premier terme a de la racine. 2°. Du produit du quarré a^2 du premier terme a par le second b triplé, ce qui est exprimé par $3a^2b$. 3°. Du produit du premier terme a par le quarré b^2 du second triplé, ainsi que le montre l'expression $3ab^2$. 4°. Du cube b^3 du second terme b. Voilà toutes les parties qui composent un cube dont la racine n'a que deux termes.

Voyons ce qu'elle contient quand elle en a trois. Faisons le cube de la quantité $a + b + c$, nous trouverons que ce cube est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ qui contient, outre le cube $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ des

deux premiers termes, 1°. $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + b^2} \times 3 \times c$, c'est-à-dire, le triple du quarré des deux premiers termes par le troisième terme c. 2°. $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3 \times c^2$ ou le triple de la somme des deux premiers termes par le quarré du troisième c. 3°. Enfin le cube c^3 du troisième terme.

S'il y avoit quatre termes à la racine, outre le cube des trois premiers termes, on trouveroit encore le triple du quarré des trois premiers termes, par le quatrième, plus le triple de la somme des trois premiers termes par le quarré du quatrième, avec le cube du quatrième, &c.

Puisque nous sçavons maintenant ce qui compose un cube, la décomposition de ce cube ou l'extraction de la racine cubique ne doit pas nous coûter beaucoup; il ne s'agit que de dégager, par le moyen de la division, ce que la multiplication a composé.

EXEMPLE.

On propose de déterminer la racine cubique de la grandeur Algébrique $c^3 - 3c^2y - y^3 + 3cy^2$.

OPÉRATION.

$$\begin{array}{l|l} c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 & c - y \\ \cline{2-2} -c^3 & +3c^2 \\ \hline * & \\ c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 & \\ -c^3 + 3c^2y - 3cy^2 + y^3 & \\ \hline * \quad * \quad * \quad * & \\ \hline \end{array}$$

Disposons d'abord les termes de cette quantité suivant les degrés de la lettre d'origine c, comme on le voit dans l'opération. Et comme le premier terme c^3 est un cube, extrayons la racine cubique de ce terme : on voit qu'elle est c; nous écrirons c à la racine, & nous retrancherons de la puissance proposée le cube de cette racine. Après quoi pour trouver le second terme de la racine dans le reste $-3c^2y + 3cy^2$, &c. comme nous sçavons que ce second terme est multiplié par le triple du quarré du premier terme c, quarrons le terme c, & triplons-le; nous aurons $3c^2$ par lequel il nous faut diviser $-3c^2y$, & il nous viendra $-y$ que nous écrirons à la racine; mais comme dans un cube quelconque il y a toujours le cube des deux premiers termes d'une racine, cubons donc $c-y$, & ôtons ce cube de la quantité proposée, il ne reste rien : ainsi la grandeur $c-y$ est la véritable racine cubique cherchée.

Après avoir bien reconnu les parties qui composent un cube Algébrique, & en avoir fait l'analyse, appliquons nos observations & nos règles à l'extraction des racines cubiques en nombres.

Extraction de la Racine cubique en nombres.

81. Nous supposerons pour cela que l'on sçache par cœur les cubes des neuf chiffres, & si on ne les sçait pas, on consultera la Table suivante.

Table des quarrés & des cubes de tous les chiffres depuis 1 jusqu'à 9.

Racines	Quarrés	Cubes
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Cette Table est très-facile à entendre : on voit que le quarré de 2 est 4, & que son cube est 8. Pareillement 125 est le cube de 5 ; &c. Dans cette Table les cubes des neuf chiffres sont accompagnés de leurs quarrés, parce que l'on a souvent besoin des quarrés des chiffres pour l'extraction de la racine cubique.

82. Observons d'abord qu'un cube, ou un nombre quelconque, qui n'est composé que de trois chiffres, ne peut avoir deux chiffres à sa racine cubique. Par exemple, 999 n'aura pas deux chiffres à sa racine cubique, puisque 10, qui est la plus petite racine composée de deux chiffres, donne 1000 à son cube ; & cette quantité est composée de quatre chiffres. Ainsi tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 1000 exclusivement, ne pourront avoir qu'un chiffre entier à leur racine cubique.

De même tous les nombres qui contiendront plus de quatre chiffres, mais qui en auront moins que sept, n'auront pas trois chiffres à leur racine cubique. Ainsi 999999, le plus grand des nombres à six chiffres n'aura pas trois chiffres à sa racine cubique : car 100, qui est la plus petite quantité à trois chiffres, produit le cube 1000000 plus grand que le nombre 999999. Il sera aussi facile de remarquer qu'un nombre au-dessus de sept chiffres, mais au-dessous de dix, n'aura pas quatre chiffres à sa racine. Lorsqu'il sera au-dessus de dix, mais au-dessous de 13, il n'en aura pas cinq, & ainsi de suite, en prenant pour limites les nombres 1, 4, 7, 10, 13, &c. dont la différence est 3.

On pourra donc par cette observation déterminer tout-à-coup le nombre des chiffres dont sera composée une racine cubique d'une quantité quelconque, telle que 13 | 312 | 053, en la coupant par tranches, dont chacune renferme trois chiffres, en commençant de la droite vers la gauche, où il pourra arriver que la première tranche la plus à la gauche ne contiendra qu'un chiffre, parce qu'une racine cubique peut être exprimée par un seul chiffre; le nombre de ces tranches fera donc toujours connoître de combien de chiffres la racine cubique sera composée : elle en contiendra trois dans cet exemple; & cela doit être, parce que la quantité proposée étant au-dessus de sept chiffres, mais au-dessous de dix, ne pourra pas avoir plus de trois chiffres à sa racine.

83. Afin de sçavoir à présent comment nous connoîtrons chacun de ces chiffres, il nous faut composer un cube sur le modèle de la formation Algébrique : prenons le nombre 237, dont on trouveroit le cube en multipliant son quarré par chacun des chiffres qui le composent; ce qui le fait

distinguer en trois parties, 200 + 30 + 7. Or pour élever à son cube une quantité numérique composée de trois termes, nous nous servirons de la formule Algébrique $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3c + \overline{a+b} \times 3c^2 + c^3$, qui est le cube de la quantité $a + b + c$ composée de trois termes, & où nous supposerons que $200 = a$, $30 = b$, $7 = c$.

Formation Algébrique du cube du nombre 237, ou 200 + 30 + 7.

8 0 0 0 0 0 0	a^3
3 6 0 0 0 0 0	$3a^2b$
5 4 0 0 0 0	$3ab^2$
2 7 0 0 0	b^3
1 1 1 0 9 0 0 . . .	$\overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3c$
3 3 8 1 0 . . .	$\overline{a+b} \times 3c^2$
3 4 3	c^3
1 3 3 1 2 0 5 3	

Ainsi cette formule fait voir, à cause du cube a^3, que l'on doit écrire d'abord le cube 8000000 du premier terme 200. Ensuite 3600000, c'est-à dire, le triple du quarré du premier terme 200 par le second 30, représenté par $3a^2b$; après cela, le triple du quarré du second terme 30 par le premier terme 200, c'est-à-dire, 540000, comme l'indique $3ab^2$, & le cube 27000 du second terme 30 exprimé par b^3. Outre cela 1110900, c'est-à-dire, le triple du quarré des deux premiers termes 200 + 30 multiplié par

le troisième terme 7, ainsi que l'expression correspondante $\overline{aa + 2ab + bb} \times 3c$ le fait voir : de plus 33810, ou le triple de la somme des deux premiers termes 200 + 30 multiplié par le quarré du troisième terme 7, ce que montre l'expression $\overline{a+b} \times 3c^2$. Enfin le cube 343 du troisième terme 7 exprimé par c^3. Et faisant l'addition de tous ces produits, on trouve que le cube du nombre 237 est 13312053, comme on l'auroit déterminé en agissant à l'ordinaire; mais nous avons déja dit qu'on ne devoit point employer ici la méthode de la multiplication Arithmétique, parce que cette méthode faisoit disparoître l'artifice de la composition, sans laquelle il ne paroît pas que l'on pût découvrir les loix de l'Analyse.

Examinons présentement où nous devons trouver chaque terme de la racine dont nous venons de former le cube. 1°. Le premier terme, élevé au cube, a donné 8000000 qui est un nombre positif précédé de six chiffres; ainsi nous en retrouverons la racine cubique dans les deux termes 13 de la première tranche, qui sont en effet précédés de six chiffres. 2°. Le triple du quarré du premier terme par le second est 3600000, ou un produit de nombres positifs précédés de cinq chiffres; & par conséquent l'on doit retrouver le second terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre 3 de la seconde tranche 312, parce que le nombre 3 est précédé de cinq chiffres. Enfin on découvrira où est placé le troisième terme, en observant que ce terme est multiplié par le triple du quarré des deux premiers termes, dont le produit est 11109 précédé de deux zéros, comme on le voit dans sa véritable expression 1110900;

ainsi l'on déterminera le troisième terme de la racine, sans aller plus loin que le premier terme o de la troisième tranche, ce terme étant précédé de deux chiffres.

S'il y avoit un plus grand nombre de tranches, quatre par exemple, on trouveroit le quatrième terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre de la quatrième tranche.

Puisque nous sçavons présentement le lieu de chaque terme de la racine, voyons comment nous l'en ferons sortir, c'est-à-dire, comment nous le dégagerons des autres nombres qui l'y retiennent: nous avons vu qu'il étoit lié à ces nombres par la multiplication; il faut donc, s'il est permis de parler ainsi, qu'il soit délié par la division.

Soit donc proposé le nombre 1 3 3 1 2 0 5 3 dont on demande la racine cubique.

OPÉRATION.

```
                               | 2 3 7      . Racine
 1 3 | 3 1 2 | 0 5 3           |-----------
   8                           |     1 2    . Diviseurs.
 ----                          | 1 5 8 7
   5 3
 1 3 3 1 2
 1 2 1 6 7
 ---------------
   1 1 4 5 0
 ---------------
```

Je le coupe en tranches qui renferment trois chiffres, en commençant de la droite vers la gauche. Dans cet exemple, la première tranche la plus à la gauche n'en contient que deux; elle pourroit même n'en contenir qu'un, par la raison que le cube du premier terme, que l'on trouve toujours

dans la première tranche, peut être exprimé par un seul chiffre.

Cette première opération me fait juger d'abord que la racine cubique aura trois chiffres; & pour en déterminer le premier, je me rappelle la formation d'un cube, où j'ai vu que le cube du premier terme d'une racine étoit toujours renfermé dans la première tranche; j'extrairai donc la racine cubique du nombre 13. La plus grande que je trouve est 2 que j'écris. Cubant 2, j'ai 8 que j'ôte de la première tranche, & il me reste 5, à côté duquel je descends le premier chiffre 3 de la seconde tranche 312; & je dois trouver dans 53 le second terme de ma racine, parce que nous avons fait observer que l'on devoit trouver le second terme de la racine, sans aller plus loin que le premier chiffre de la seconde tranche: nous sçavons d'un autre côté que ce second terme de la racine est multiplié par le triple du quarré du premier terme 2 que nous venons de trouver, c'est-à-dire, que ce terme cherché est multiplié par 12 (car le quarré de 2 est 4, & $4 \times 3 = 12$); je divise donc 53 par 12, l'opération me fait voir que je ne dois pas écrire 4 à la racine, parce que si je cubois 24, pour en retrancher le cube des deux premières tranches, je trouverois un produit trop grand; je n'écris donc que 3, ce qui me produit 23 à la racine; & comme je sçais, par la formation d'une puissance cubique, que le cube des deux premiers termes 23 est renfermé dans les deux premières tranches, je cube 23, j'en ôte le produit 12167 des nombres 13312, contenus dans les deux premières tranches, que je récris au-dessous du dividende 53, afin de pouvoir faire ma soustraction avec plus de facilité; & il reste 1145, à côté desquels je descends le premier chiffre 0 de la troi-

sième tranche, parce que la formation du cube nous a fait remarquer que l'on devoit retrouver le troisième terme d'une racine cubique, sans aller plus loin que le premier chiffre de la troisième tranche: nous avons appris aussi par cette même formation que ce troisième terme étoit multiplié par le triple du quarré des deux premiers termes 23 : quarrons donc 23, nous aurons 529 dont le triple = 1587, & divisons par ce triple le nombre 11450, nous aurons 7 au quotient, & la racine totale sera 237, que l'on cubera pour se convaincre qu'elle est exacte, puisque le cube de cette quantité redonnera 13312053.

Second Exemple d'une extraction de Racine cubique.

Pour extraire la racine cubique du nombre 140608, je le coupe en tranches, & je vois d'abord que ma racine n'aura que deux chiffres.

OPÉRATION.

	52
140 | 608	75 Diviseur.
125	
156	

J'extrais donc la racine cubique de la première tranche; je trouve qu'elle est 5; si je ne le voyois pas d'abord, je consulterois la table (n°. 81.): je cube 5, & j'ai 125, que j'ôte de la première tranche 140; il reste 15, à côté desquels je descends le premier chiffre 6 de la seconde tranche, pour avoir 156 à diviser par le triple du quarré 5 = 75 : or

divisant 156 par 75, on a 2 que l'on écrit à la racine qui est alors 52 : on cube 52, & trouvant que son produit = 140608, on est assuré que 52 est exactement la racine cubique cherchée.

TROISIÈME EXEMPLE.

On extraira la racine cubique de 219256227, en le coupant d'abord en trois tranches, qui feront juger que la racine doit avoir trois termes.

OPÉRATION.

	6 0 3	Rac.
2 1 9 | 2 5 6 | 2 2 7	1 0 8	
2 1 6	1 0 8 0 0	Divis.
. . 3 2		
2 1 9 2 5 6		
2 1 6 0 0 0		
. . 3 2 5 6 2		

Après cela on extraira la racine cubique de la première tranche 219, & l'on verra par la table (n°. 81.) qu'elle ne peut être que 6 : on écrira 6 à la racine. On en fera le cube 216 que l'on ôtera de 219, & il restera 3 à côté duquel on descendra le premier chiffre 2 de la seconde tranche 256 : on triplera le quarré du premier terme 6 de la racine, & l'on aura 108, par lesquels divisant 32, il vient 0 que l'on écrit à la racine : on fait le cube 216000 des deux premiers termes 60, que l'on retranche des deux premières tranches 219|256, & il reste 3256 à côté desquels on descend le premier chiffre 2 de la troisième tranche 227, pour avoir 32562 à diviser par

10800, c'est-à-dire, par le triple du quarré des deux premiers termes 60 de la racine, & dont le quotient est 3 que l'on écrit à la racine. Après quoi élevant au cube la racine 603, elle produit 219256227, ce qui prouve que cette racine est exacte.

Il est très-rare de trouver une racine cubique exacte; mais cet inconvénient ne fait qu'allonger le calcul; car l'on approche de cette racine aussi près que l'on veut, en suivant la méthode dont nous avons fait usage (nº. 79.) pour l'approximation à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré.

Approximation de la racine cubique, dans les cas où il n'est pas possible d'avoir cette racine à la rigueur.

84. Soit le nombre 35 dont on demande la racine cubique qui n'est pas possible à la rigueur, mais dont on voudroit n'être pas éloigné de $\frac{1}{100}$.

On multipliera le nombre 35 par une quantité dont la racine cubique soit 100. Or le cube de 100 est 1000000; par conséquent on écrira 35000000, & l'on divisera ce produit par 1000000, afin d'avoir l'espèce de fraction $\frac{35000000}{1000000} = 35$ dont il s'agit d'avoir la racine.

OPÉRATION.

35 | 000 | 000 | 000	327
27	27
80	3072
35000	
32768	
2232 0	
35000000	
34965783	
34217	

Mais on a la racine cubique d'une fraction, en extrayant la racine cubique de son numérateur & de son dénominateur; par exemple, la racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, une fraction dont le numérateur est la racine cubique du numérateur 8, & dont le dénominateur est aussi la racine cubique du dénominateur 27 : par conséquent pour avoir la racine cubique de 35 sous la forme de $\frac{35000000}{1000000}$, on extraira simplement la racine cubique du numérateur 35000000; car on sçait que celle du dénominateur 1000000 est 100; on trouvera que cette racine cubique est $\frac{327}{100}$ & même quelque chose de plus; car si l'on cube 327, & que l'on ôte ce produit de 35000000, il y aura 34217 de reste, ainsi il ne s'en faut pas $\frac{1}{100}$ que l'expression $\frac{327}{100}$ ne soit exactement la racine cubique de 35.

On pourroit approcher beaucoup plus près de la racine cubique de 35; c'est pourquoi, afin que l'on sçache comment l'on doit se conduire dans ces sortes d'approximations, il faut retenir la règle que nous allons proposer.

O *

Quand on voudra avoir une racine cubique, tellement approchée qu'il ne s'en manque pas $\frac{1}{1000}$, on multipliera le nombre proposé par une quantité dont 1000 *soit la racine cubique; & si l'on vouloit qu'il ne s'en manquât pas $\frac{1}{10000}$, on le multiplieroit par un nombre dont la racine cubique seroit* 10000, *&c.* & par-là on évitera le calcul des décimales, qui paroît toujours un peu compliqué aux jeunes gens.

J'ai remarqué que ce calcul leur coûtoit, qu'ils n'aimoient point à en faire usage, parce que sa façon ne paroît pas assez déduite de la manière d'opérer sur les fractions ordinaires; c'est ce qui m'a déterminé à transformer les nombres entiers, qui n'ont pas une racine exacte, sous la forme d'une fraction, & d'en tirer la racine, comme on le fait par rapport aux fractions vulgaires; ainsi sans introduire un nouveau calcul, j'en retire néanmoins tous les avantages.

De la formation des Equations, & de leur analyse.

85. Une *Equation* est l'expression d'une même valeur sous différens noms : quand je dis que 50 divisé par 10 donne 5, je fais une équation à laquelle je puis donner cette expression $\frac{50}{10} = 5$, où l'on voit qu'une équation s'exprime en mettant le signe $=$ entre deux valeurs égales qui n'ont pas un même nom. Les termes qui sont à gauche du signe $=$ sont le *premier membre* de l'équation, & ceux qui sont à droite de ce même signe en forment le *second membre*.

Quoique $\frac{50}{10} = 5$ soit la forme sous laquelle on produit une équation, ce n'est pas en considération de ces grandeurs connues que l'on a inventé les équations ; car une quantité connue n'a pas besoin de deux noms : mais si l'on propose de déterminer

terminer un nombre, lequel multiplié par 7 produise 441, comme on ne voit pas tout d'un coup le nombre qui a cette propriété, on est obligé de le comparer à la quantité qui lui est égale, suivant les conditions de la question : c'est pourquoi, donnant un nom à ce nombre inconnu ou indéterminé, l'appellant, par exemple x, je forme l'équation $x \times 7$ ou $7x = 441$; & la raison pour laquelle je donne un nom à ce nombre inconnu, c'est afin de voir comment il se combine dans toutes les opérations auxquelles on peut le soumettre.

Nous voilà sans doute arrivés à la partie brillante de l'Algèbre, à cette espèce de *machine à découvertes*, si l'on peut s'exprimer ainsi, qui ménage si avantageusement les forces de notre esprit. L'état d'une question bien conçu, & son équation une fois bien établie, on peut assurer que le problême est résolu; il n'y a plus que quelques petites façons de calcul que nous allons enseigner, moyennant lesquelles on trouve une résolution sans aucun effort de génie, & même quelquefois sans y penser : ainsi l'esprit n'usant pas sa vigueur, en devient plus propre à embrasser une multitude d'objets.

Par tout ce que nous venons de dire on peut juger, que ce sont les équations qui ont donné naissance à l'Algèbre. On a remarqué qu'une question à résoudre, ou autrement un problême, renfermoit nécessairement une équation, où il s'agissoit de comparer une grandeur inconnue à des quantités connues. Il a fallu par conséquent donner des noms différens à ces grandeurs.

On est convenu que les quantités connues qui entrent dans un problême seroient exprimées par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d, &c. & que les dernières lettres x, y, z, &c. serviroient à l'expression des inconnues.

Il y a donc des grandeurs connues & des grandeurs inconnues dans un problême : on cherche à y déterminer la valeur des inconnues, c'est-à-dire, à les égaler à des grandeurs connues; or cela ne se peut faire qu'en employant les différentes opérations de l'Algébre, qui, comme nous l'avons dit, n'est autre chose que le calcul des grandeurs indéterminées. On ajoûte, on soustrait, on multiplie, on divise, &c. selon que la nécessité s'en présente. Tout ce que l'on fait sur les équations, afin d'en dégager les inconnues, s'appelle en général *la Réduction des Équations.*

De la Réduction des Équations.

86. La Réduction des Équations consiste à mettre seul dans un membre le terme qui renferme l'inconnue de l'équation.

1°. Cela s'exécute avec l'addition. Vous avez l'équation $x - a = c$: il est clair qu'en mettant $+ a$ dans l'un & l'autre membre de cette équation, il y aura toujours égalité : ainsi cette équation deviendra $x - a + a = c + a$; or $- a$ & $+ a$ se détruisent; par conséquent l'équation réduite est $x = c + a$: & l'addition que nous avons faite n'a point altéré l'équation proposée; car des grandeurs égales ne cessent pas de l'être quand elles sont également augmentées.

Pour dégager y de l'équation $y - c - d = f + m$, j'ajoute à chaque membre de l'équation $+ c + d$, & j'ai $y - c - d + c + d = f + m + c + d$, c'est-à-dire, en effaçant $- c - d + c + d$ qui se détruisent, que l'équation devient $y = f + m + c + d$, où la quantité y est dégagée.

De même on dégageroit y en faisant une souf-

traction de grandeurs égales. Soit l'équation $y + d = b + f$; ôtez $+ d$ de part & d'autre, vous aurez $y + d - d = b + f - d$, c'est-à-dire, $y = b + f - d$, & la quantité inconnue est dégagée.

Remarquez donc que l'on dégage une inconnue par la voie de l'addition & de la soustraction, en faisant disparoître du membre où est l'inconnue tous les termes qui l'accompagnent, & en écrivant ces mêmes termes dans l'autre membre avec des signes contraires : ainsi $x - a + d = g + m$ devient $x = g + m + a - d$.

87. Par cette méthode on peut rendre tous les termes d'une équation positifs, & même les faire passer tous dans un seul membre; car l'équation $aa - 2bc + dd = 2cd - 3r - 4f$ peut devenir $aa + 3r + 4f + dd = 2cd + 2bc$, en faisant passer les termes négatifs dans un autre membre avec des signes contraires.

Cette dernière équation $aa + 3r + 4f + dd = 2cd + 2bc$ deviendra, si l'on veut, $aa + 3r + 4f + dd - 2cd - 2bc = 0$, ou $2cd + 2bc - aa - 3r - 4f - dd = 0$, par la raison qu'une quantité se réduit à rien, quand on en retranche une grandeur égale à cette quantité.

88 On fait aussi usage de la multiplication pour chasser les grandeurs qui accompagnent l'inconnue d'une équation; or cela ne peut arriver que dans le cas où l'inconnue est divisée par quelqu'autre quantité : il n'y a que les contraires qui puissent réciproquement se détruire.

Vous propose-t-on l'équation $\frac{yy}{2b} = f + g$, où il faut dégager yy, & par conséquent chasser $2b$ qui la divise? Dites : deux grandeurs égales multipliées par une même grandeur donnent des

produits égaux, & puisque la grandeur yy est divisée par $2b$, multiplions l'un & l'autre membre de l'équation par la quantité qui divise, nous aurons $\frac{yy \times 2b}{2b} = \overline{f+g} \times 2b$, ou $yy = 2bf + 2bg$, & l'inconnue yy est dégagée : il est donc très-facile de transformer une équation où il y a des fractions, en une autre équation qui en soit totalement délivrée, puisqu'une fraction réduite à sa véritable idée est une division pure (n°. 34.).

L'équation $2c + \frac{m}{d} = a + b$, en multipliant tous ses termes par le dénominateur d, deviendra $2cd + m = ad + bd$; & s'il y avoit plusieurs fractions dans une équation, comme $ds + \frac{cm}{a} + \frac{r}{t} = bx - \frac{fg}{p}$, on multiplieroit tous les termes de cette équation par le produit apt de tous les dénominateurs, & l'on auroit l'équation $adpst + cmpt + apr = abptx - afgt$, où les fractions sont évanouies:

89. Puisque la multiplication fait évanouir les grandeurs qui divisent l'inconnue, réciproquement la division chassera les quantités qui accompagneront l'inconnue par voie de multiplication. Vous avez $abx = 3cd + 2r$: divisez l'un & l'autre membre par la quantité ab qui multiplie l'inconnue x, l'équation subsistera toujours (car des grandeurs égales divisées par une même grandeur donnent des quotiens égaux) vous aurez $\frac{abx}{ab} = \frac{3cd + 2r}{ab}$, ou, en faisant évanouir ce qui se détruit, $x = \frac{3cd + 2r}{ab}$, équation où le produit ab ne paroît plus dans le premier membre; mais il fait la fonction de diviseur dans le second.

Voulez-vous encore dégager l'inconnue z de l'équation $2dm - cr = fz - gz$? Remarquez que le second membre $fz - gz = z \times \overline{f - g}$: ainsi $f - g$ multipliant l'inconnue z, vous diviserez l'un & l'autre membre de l'équation proposée par $f - g$, ce qui produira $\frac{2dm - cr}{f - g} = \frac{fz - gz}{f - g}$, c'est-à dire, en effaçant ce qui se détruit, $z = \frac{2dm - cr}{f - g}$.

Cette maniére de dégager une inconnue est aussi fort propre à simplifier une équation, dont tous les termes sont multipliés par une même grandeur : comme on s'apperçoit facilement que tous les termes de l'équation $b^2 x - b^2 c = a b^2 + b^3$ sont multipliés par la quantité b^2; puisque l'on peut produire cette équation sous la forme $\overline{x - c} \times bb = \overline{a + b} \times bb$, où il est visible que bb multiplie l'un & l'autre membre de l'équation; on divisera donc par bb, & l'on aura $\frac{b^2 x - b^2 c}{bb} = \frac{ab^2 + b^3}{bb}$ ou, en faisant évanouir ce qui se détruit, $x - c = a + b$: équation beaucoup plus simple que la précédente; & si l'on transpose $-c$, la dernière équation deviendra $x = a + b + c$, où l'inconnue x est entièrement dégagée.

Quand tous les termes d'une équation ne seroient pas multipliés par une même grandeur, pourvû qu'il y en eût plusieurs, on ne laisseroit pas de simplifier l'équation : par exemple, $axx + bc = adf - 2ag$ est une équation où l'on peut faire évanouir la grandeur a de tous les termes où elle se trouve dans l'équation; car en divisant par a, elle deviendra $\frac{axx}{a} + \frac{bc}{a} = \frac{adf}{a} - \frac{2ag}{a}$; ce qui se réduit à l'équa-

tion $xx+\frac{bc}{a}=df-2g$. Et enfin, en dégageant totalement l'inconnue, $xx=df-2g-\frac{bc}{a}$, &c.

90. Assez souvent l'extraction des racines sert à simplifier une équation; car si de grandeurs égales on peut extraire une même racine, il est certain qu'il y aura toujours équation; mais comme il n'est pas rare qu'un membre d'une équation ait une racine exacte, tandis que l'autre membre n'en a pas, on a imaginé le signe $\sqrt{}$ pour marquer qu'il s'agit d'extraire une racine des quantités qui sont sous ce signe; & afin de désigner le degré de cette racine, on écrit son exposant entre les branches de ce signe, que nous appellerons dans la suite *signe radical*; ainsi $\sqrt[2]{ac}$ signifie qu'il faut extraire la racine quarrée ou seconde de ac. $\sqrt[3]{b^2 c}$ exprime la racine troisième ou cubique de $b^2 c$, &c. $\sqrt{}$ sans aucun nombre est censé signifier $\sqrt[2]{}$.

On veut dégager l'inconnue x de l'équation $b^2 x^2 = am$. Le premier membre de cette équation étant un quarré parfait, on extraira la racine quarrée du premier membre, & on affectera le second du signe radical. L'équation $b^2 x^2 = am$ deviendra donc $bx=\sqrt[2]{am}$; & divisant l'un & l'autre membre par b, on aura $x=\frac{\sqrt[2]{am}}{b}$.

Par la même raison vous dégagerez l'inconnue de l'équation $xx-2cx+cc=3b$, dans laquelle le premier membre est un quarré exact de la quantité $x-c$. Ainsi en tirant la racine quar-

rée du premier membre, on mettra sous le signe radical l'autre membre qui n'est pas quarré, & l'équation sera $x - c = \sqrt[2]{3b}$, ou, en transposant $-c$, $x = c + \sqrt{3b}$.

91. Soit encore l'équation $yy - 2by + bb = f^2$ dont il faut dégager l'inconnue y. Comme on s'apperçoit que les deux membres de cette équation sont des quarrés parfaits, on extraira la racine quarrée de l'un & de l'autre membre; ce qui produira $y - b = f$, où il est important d'observer que le second membre f peut être précédé du signe $+$ ou du signe $-$; car $+f \times +f = +ff$; mais $-f \times -f$ produit aussi $+ff$.

D'où il suit que l'équation précédente est susceptible de cette expression $y - b = \pm f$: ce qui signifie que la quantité $y - b$ peut être $+f$ ou $-f$. Si on la suppose $= +f$; en transposant b, l'équation deviendra $y = b + f$: mais en supposant qu'elle soit $-f$, on aura $y = b - f$. Or $b - f$ est fort différent de $b + f$ que nous avons aussi trouvé pour la valeur de y. L'inconnue peut donc avoir deux valeurs différentes dans une équation du second degré (a).

(a) Nous avons supposé $y - b = +f$, & $y - b = -f$. On pourroit nous dire que nous aurions dû aussi prendre $b - y$ pour la racine du premier membre; car le quarré de $b - y = bb - 2by + yy$ est précisément la même chose que le quarré de $y - b = yy - 2by + bb$, & l'on auroit alors $b - y = +f$, & $b - y = -f$, ce qui est vrai; mais il faut remarquer que ces deux dernières équations reviennent au même que les deux précédentes, comme il est facile de le voir, en transposant les termes.

Cependant il reste toujours une difficulté. Comment

92. Quoiqu'une équation du second degré ne paroisse avoir aucun de ses membres qui soient des quarrés parfaits, comme $xx + bx = s$; ce n'est pas à dire que l'on n'en puisse pas dégager l'inconnue x par l'extraction de la racine quarrée. En observant ce qui manque au premier membre $xx + bx$ pour être un quarré parfait, il est évident que si j'augmente ce nombre de ce qui lui est nécessaire, je pourrai dégager l'inconnue x à l'ordinaire.

Pour déterminer donc la grandeur dont l'addition peut rendre le membre $xx + bx$ un quarré parfait, je prends une grandeur $y + c$, dont je forme le quarré $yy + 2cy + cc$, où je remarque que le troisième terme cc est le quarré de la moitié de la quantité $2c$ qui multiplie l'inconnue dans le second terme. J'applique donc cette observation à l'équation proposée $xx + bx = s$. Je prends la moitié de la quantité b qui multiplie l'inconnue x dans le second terme, & j'ai $\frac{b}{2}$; l'élevant au quarré, cela me donne $\frac{bb}{4}$: je l'ajoute à l'un & à l'autre membre de mon équation, qui devient $xx + bx + \frac{bb}{4} = s + \frac{bb}{4}$, où le pre-

conçoit-on que $y - b = +f$, & $y - b = -f$, c'est-à-dire, que la même quantité $y - b$ soit positive & négative en même-tems ?

Cela n'est pas effectivement concevable. Considérez donc que l'indéterminée y peut être plus grande ou plus petite que b : si l'indéterminée y est plus grande que b, l'équation $y - b = +f$ exprime une racine positive ; mais si l'indéterminée y est plus petite que b, la racine de cette équation est négative ; c'est pourquoi on l'exprime aussi par $y - b = -f$.

mier membre est un quarré parfait ; j'en extrais donc la racine quarrée, cela me produit $x + \frac{b}{2} = \begin{matrix}+\\ \text{ou}\\ -\end{matrix} \sqrt[2]{s + \frac{bb}{4}}$, & transposant $+ \frac{b}{2}$, j'ai $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt[2]{s + \frac{bb}{4}}$, où x est entièrement dégagé.

93. Quand les membres d'une équation, dont on veut dégager l'inconnue, sont affectés du signe radical $\sqrt{}$ accompagné d'un exposant quelconque, on peut faire évanouir ce radical en élevant l'un & l'autre membre de l'équation au degré marqué par l'exposant du radical : soit, par exemple, l'équation $\sqrt[3]{a + x} = 2\,b\,d$; si l'on élève au cube l'un & l'autre membre de cette équation, elle se transformera en celle-ci : $a + x = 8\,b^3\,d^3$; d'où l'on tire $x = 8\,b^3\,d^3 - a$.

On ne doit pas être surpris de voir qu'en élevant au cube le membre $\sqrt[3]{a + x}$, on ait pour produit la quantité $a + x$, qui est sous le signe radical ; car l'expression $\sqrt[3]{a + x}$ signifie la racine cubique de la quantité $a + x$: or si l'on fait disparoître le signe radical $\sqrt[3]{}$, cela veut dire que l'on ne tire pas la racine cubique de la quantité $a + x$, qui est par conséquent un cube, puisqu'on lui supposoit une racine cubique.

S'il y avoit même un radical sous un radical dans une équation, on ne laisseroit pas de dégager l'inconnue par cette méthode. Vous avez l'équa-

tion $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{b - x}} = b\,m$: élevez au cube l'un & l'autre membre de cette équation, il viendrra $a + \sqrt[2]{b - x} = b^3\,m^3$, en exterminant le signe $\sqrt[3]{\;}$ du premier membre; parce qu'une grandeur est élevée à son cube ou à sa troisième puissance, lorsque l'on détruit ce qui l'en faisoit descendre. Mais dans l'équation $a + \sqrt[2]{b - x} = b^3\,m^3$, la quantité inconnue $-x$ n'est pas encore dégagée; ainsi après avoir fait passer la lettre a dans l'autre membre, on trouve l'équation $\sqrt[2]{b - x} = b^3\,m^3 - a$; d'où l'on déduit, en quarrant l'un & l'autre membre, $b - x = b^6\,m^6 - 2\,a\,b^3\,m^3 + a\,a$; donc enfin, en transposant la lettre b, on aura $-x = b^6\,m^6 - 2\,a\,b^3\,m^3 + a\,a - b$; équation où la quantité inconnue x est négative. On la rendra positive, en faisant que le premier membre devienne le second, & le second membre devienne le premier, ce qui donnera l'équation finale $2\,a\,b^3\,m^3 + b - a\,a - b^6\,m^6 = x$.

Que l'on ne néglige pas cette méthode de faire évanouir les signes radicaux, nous aurons occasion d'en faire usage.

94. Une équation peut contenir différentes inconnues; on fera ensorte de les chasser toutes, excepté une. Vous avez l'équation $2\,x + m = c + y$, & vous sçavez d'ailleurs que $x = b\,d$. Donc $2\,x = 2\,b\,d$; ainsi vous pouvez substituer $2\,b\,d$ à la place de $2\,x$, & l'équation proposée deviendra $2\,b\,d + m = c + y$, où il n'y a plus que

l'inconnue y qui sera entièrement dégagée, en transposant la lettre c; car alors $y = 2bd + m - c$.

Soit encore l'équation $\frac{xx}{a-b} + 3z = bd - 4y$ que vous voulez réduire à une seule inconnue; parce que l'état de la question vous a fait découvrir que $x = d$ (car ce sont les conditions du problême qui font naître les équations), donc $xx = dd$, & $\frac{xx}{a-b} = \frac{dd}{a-b}$: vous pouvez donc substituer $\frac{dd}{a-b}$ à la place de $\frac{xx}{a-b}$, dans l'équation précédente, qui deviendra $\frac{dd}{a-b} + 3z = bd - 4y$, où il n'y a plus que les deux inconnues z, y. Je suppose à présent que l'on trouve encore, en réfléchissant attentivement à la question, que $z = \frac{a}{b}$; donc $3z = \frac{3a}{b}$; par conséquent en substituant $\frac{3a}{b}$ à la place de $3z$ dans la dernière équation, elle deviendra $\frac{dd}{a-b} + \frac{3a}{b} = bd - 4y$, où il n'y a plus que l'inconnue y. Vous la transposerez dans l'autre membre, & vous aurez $4y + \frac{dd}{a-b} + \frac{3a}{b} = bd$; transposant encore les deux termes qui accompagnent cette inconnue, l'équation sera $4y = bd - \frac{dd}{a-b} - \frac{3a}{b}$; & enfin divisant ses deux membres par le nombre 4, elle deviendra $y = \frac{bd}{4} - \frac{dd}{4a-4b} - \frac{3a}{4b}$, où l'inconnue y est entièrement dégagée.

Il n'est pas besoin d'en dire davantage. Ces manières de préparer une équation vont être appliquées à la résolution de quelques Problêmes, qui en feront sentir toute l'importance.

De la Résolution des Problêmes.

Nous ne prescrirons pas, suivant la coutume, de grandes règles générales pour la résolution des Problêmes; ce seroit nous exposer à n'être pas entendus. Il nous a toujours paru que le vrai moyen de cultiver l'esprit, étoit de faire découvrir les règles par le seul bon sens, & de les établir ensuite : ainsi proposons nous quelques Problêmes, & remarquons bien les moyens de résolution que la simple lumière naturelle nous fournit.

PROBLÊME. I.

95. Un Coureur sçait qu'il va quatre fois plus vîte qu'un autre : il parie qu'il arrivera plutôt que lui à un endroit éloigné de 15 lieues de celui où la gageure est proposée; l'autre accepte la proposition, à condition qu'on lui donnera 11 lieues d'avance. On demande lequel des deux gagnera.

RÉSOLUTION.

Il est évident que le Problême sera résolu, si l'on détermine la distance où le premier Coureur doit atteindre son adversaire : si c'est au-delà du but, il a perdu; mais en-deçà, il a gagné. J'appelle x le chemin que fera celui qui a 11 lieues d'avance avant que d'être rencontré par le premier Coureur; ainsi dans ce moment-là son état sera $11 + x$; & comme le premier Coureur est supposé aller quatre fois plus vîte que son adversaire, quand ils se rencontreront le premier Coureur aura fait quatre fois plus de chemin, c'est-à-dire, $4x$; mais à l'instant de rencontre ils seront éga-

lement éloignés du premier point de partance : voilà donc une égalité. Ainsi $11 + x = 4x$, & la question est réduite à une équation dans laquelle il faut dégager l'inconnue x.

Otons x de part & d'autre; il reste $11 = 3x$. Divisons l'un & l'autre membre par 3 ; nous aurons $\frac{3 \times x}{3} = \frac{11}{3}$ ou $x = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$. Celui qui a 11 lieues d'avance n'aura donc fait que 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue quand il sera atteint par l'autre Coureur : joignons ce chemin aux 11 lieues d'avance, cela produit 14 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue; le premier Coureur a donc gagné, puisqu'il atteint son adversaire $\frac{1}{3}$ de lieue avant le but, que l'on a supposé à 15 lieues de distance.

96. Tout l'essentiel de la résolution d'un Problême consiste, comme l'on voit, à construire l'équation qui l'exprime : l'équation une fois construite, il ne s'agit plus que de dégager les inconnues; nous en avons donné les règles : par ce dégagement les inconnues sont égales à des grandeurs connues, & le Problême est résolu, s'il est possible ; & s'il ne l'est pas, l'équation le fera voir encore, ce qui est une véritable résolution : car on ne peut résoudre un Problême que de deux manières, ou en déterminant ce que l'on demande, ou en faisant voir que l'on a proposé une chose absurde.

Bien des gens ont entendu parler du fameux Problême de la *quadrature du cercle* (*a*). Ceux qui démontreront que cette quadrature est impossible, auront résolu le Problême à la rigueur : c'est pourquoi il faut attendre que cette impossibilité soit démontrée, avant de condamner ceux qui s'appli-

(*a*) La quadrature du cercle consiste à trouver une surface renfermée dans un quarré, égale à une surface renfermée dans un cercle.

quent à la résolution de ce Problême : tout ce qu'il y auroit à leur dire, seroit de les inviter à s'appliquer autant à découvrir les raisons contraires à la possibilité de cette quadrature, qu'ils paroissent décisifs quand ils font valoir les moyens qui lui sont favorables.

97. Nous avons dit que ce qu'il y avoit de plus important dans la résolution d'un Problême, étoit de trouver son équation; il n'y a point de règle à donner là-dessus, cela dépend de la sagacité de celui qui en tente la résolution. Il n'est pas besoin de dire que l'on doit se rendre très attentif à l'état de la question; qu'il faut en bien considérer les conditions, ce qui s'appelle autrement les *données* du Problême; que c'est toujours en conséquence de ces données, que la résolution doit se faire; que l'augmentation ou la diminution des données change le Problême; que le nombre des inconnues, comme celui des données, doit être déterminé avec soin; qu'en un mot on ne doit faire entrer dans l'équation d'un Problême, ni plus ni moins que ce qui est accordé, le bon sens faisant assez comprendre que le moindre changement des circonstances change nécessairement le Problême. On prouve enfin que l'on a trouvé la véritable valeur des inconnues, en faisant voir qu'elles satisfont à la question.

Par exemple, en résolvant le Problême ci-dessus, nous avons trouvé que le Coureur atteindroit celui qui a 11 lieues d'avance, lorsque ce dernier auroit fait 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue, c'est-à-dire, lorsqu'il seroit eloigné de 14 lieues & $\frac{2}{3}$ du premier point de partance; il faut donc prouver que le premier Coureur aura parcouru 14 lieues $\frac{2}{3}$, quand son adversaire aura fait 3 lieues & $\frac{2}{3}$ de lieue. Or, suivant l'état de la question, le premier Coureur doit avoir fait 4 fois plus de chemin que son

adverſaire; c'eſt donc 4 fois 3 lieues & $\frac{2}{3}$ = 12 + $\frac{8}{3}$ = 14 + $\frac{2}{3}$; par conſéquent le premier Coureur ſera auſſi avancé que ſon adverſaire, après que celui-ci aura ſeulement parcouru 3 lieues & $\frac{2}{3}$.

PROBLÊME II.

98. Il y a des montres qui portent trois aiguilles; l'une marque les heures, une autre les minutes, & la troiſième eſt pour les ſecondes. L'aiguille des minutes & celle des ſecondes ſont ſuppoſées partir du même point; mais l'aiguille des ſecondes qui va 60 fois plus vîte que celle des minutes, prendra ſur le champ les devans : on voudroit ſçavoir à quel point l'aiguille des ſecondes ratrapera celle des minutes.

RÉSOLUTION.

Suppoſons que les deux aiguilles partent toutes deux du même point de midi. L'aiguille des ſecondes fait ſa révolution ou le tour du cadran en une minute; ainſi, après une minute de tems, l'aiguille des ſecondes ſe trouvera ſur le même point de midi, & l'aiguille des minutes ſera avancée d'une minute de chemin vers le point d'une heure : alors l'aiguille des minutes a une minute d'avance ſur l'aiguille des ſecondes, en comptant du point de midi.

Cette réſolution revient à celle du Problême précédent. Appellons x le chemin qu'aura fait l'aiguille des minutes, lorſqu'elle ſera rencontrée par celle des ſecondes : comme cette aiguille eſt ſuppoſée avoir une minute d'avance, toute ſa diſtance au-delà du point de midi ſera $1 + x$, & au point de rencontre l'aiguille des ſecondes ſera $60\,x$; elles

auront fait le même chemin depuis le point de midi, donc $1 + x = 60\,x$: ôtons x de part & d'autre; nous aurons $1 = 59\,x$. Divisons l'un & l'autre membre par 59, l'équation deviendra $x = \frac{1}{59}$ de minute ; c'est-à-dire, que l'aiguille des secondes rencontrera l'aiguille des minutes à la fin de la première cinquante-neuvième partie de la seconde minute. Ce qui est fort aisé à prouver ; car l'aiguille des minutes & celle des secondes doivent être également éloignées de midi au point de rencontre; or cela arrivera : car x étant $\frac{1}{59}$, toute la distance de l'aiguille des minutes au-delà du point de midi sera $1 + \frac{1}{59}$ de minute; mais puisque l'aiguille des secondes va soixante fois plus vîte que celle des minutes, l'expression de son chemin doit être $60\,x$ ou $\frac{60}{59} = 1 + \frac{1}{59}$, comme celle des minutes.

PROBLÊME III.

99. On peut résoudre par ce même moyen une infinité de Problêmes. Celui d'Achille & de la Tortue est fameux. Zénon, Philosophe ancien très-subtil, & peut-être Sophiste de bonne foi, lui a donné beaucoup de réputation. Ce Philosophe avoit pris à tâche de prouver qu'il n'y avoit point dans la nature de mouvement continu; que tous les mouvemens de la nature étoient interrompus par de petits repos. Pour faire entendre cette idée, que nous ne prétendons point approuver, Zénon auroit pu, si nos montres avoient existé de son tems, comparer le mouvement des corps à celui de l'aiguille d'un cadran qui ne va que par sauts; ces sauts insensibles dans l'aiguille des heures & dans celle des minutes, sont très évidens dans celle des secondes.

Achille

Achille étoit, selon Homère, très-léger à la course, & la Tortue y est fort pesante. Si le mouvement des corps, disoit Zénon, n'est interrompu par aucun repos, il ne sera jamais possible qu'Achille atteigne la Tortue, qui auroit sur lui une lieue d'avance : car supposons qu'Achille aille dix fois plus vîte que la Tortue; puisque ces deux mobiles vont sans aucune interruption, quand Achille aura fait une lieue, la tortue aura fait la dixième partie de la seconde lieue; quand Achille parcourra cette dixième partie, la Tortue fera la dixième partie de cette dixième partie ou $\frac{1}{100}$: Achille parcourt-il cette centième partie ? la Tortue s'avancera encore du dixième de ce centième, c'est-à-dire, de $\frac{1}{1000}$, &c. ainsi elle sera toujours en avant; ce qui est contraire à l'expérience : un corps n'est donc plus lent qu'un autre, concluoit Zénon, qu'à cause d'un plus grand nombre de repos, dont son mouvement est interrompu.

Il réduisit l'ancienne Philosophie à parler fort long-tems sur cette objection, & la moderne ne l'a pas crue indigne de son examen. Les Mathématiciens ont pris un autre parti : ils supposent, ce dont on convient de part & d'autre, qu'il y a dans la nature des vîtesses plus ou moins grandes; & sans s'embarrasser comment cela peut être, ils s'attachent à déterminer précisément le Point où Achille rencontrera la Tortue.

RÉSOLUTION.

Pour cela soit x le chemin qu'aura fait la Tortue, lorsqu'Achille la rencontrera; & comme elle a une lieue d'avance, son éloignement du point d'où Achille doit partir, sera $1 + x$; mais, par la supposition, Achille parcourant le même espace,

fera 10 fois plus de chemin que la Tortue. Ainsi $1 + x = 10x$: donc $1 = 9x$, & $x = \frac{1}{9}$ de lieue : c'est à-dire, qu'Achille rencontrera la Tortue à la fin de la première neuvième de la seconde lieue, ou après avoir parcouru une lieue & $\frac{1}{9}$ de lieue ; car la Tortue faisant $\frac{1}{9}$ Achille fera $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$; ainsi Achille & la Tortue seront également éloignés du premier point de partance.

PROBLÊME IV.

100. Deux hommes partent en même tems, l'un de Paris pour Lyon, & l'autre de Lyon pour Paris, tous deux par le même chemin : le premier fait 7 lieues en deux heures, & le second n'en fait que 5 pendant le même tems : à quelle distance de Lyon & de Paris ces deux hommes se rencontreront-ils ? Nous supposons que la distance de Lyon à Paris est 100 lieues.

RÉSOLUTION.

Soit la ligne P———M———L $= 100$, la distance de Paris à Lyon, & $PM = x$ le chemin de celui qui va de Paris à Lyon. Puisque le premier fait 7 tandis que l'autre ne fait que 5, le second fera les $\frac{5}{7}$ du premier que nous avons appellé x ; ainsi le chemin du second, qui est ML, s'exprimera par les $\frac{5}{7}$ de x ou par $\frac{5x}{7}$. Cela supposé, on aura cette équation $PM = PL - ML$, ou (en substituant les valeurs de cette équation) $x = 100 - \frac{5x}{7}$. Donc, par transposition, $x + \frac{5x}{7} = 100$, & multipliant par 7, pour

faire évanouir la fraction, on aura $7x + 5x = 700$, ou $12x = 700$; enfin, divisant par 12, l'équation devient $x = \frac{700}{12} = 58 + \frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$; par conséquent $x = 58$ lieues & $\frac{1}{3}$ de lieue; c'est-à-dire, que le point où nos deux voyageurs se rencontreront, sera à 58 lieues & $\frac{1}{3}$ de Paris, & par conséquent à 41 lieues $\frac{2}{3}$ de Lyon. Pour le prouver, il suffit de faire voir que $41\frac{2}{3}$ sont les $\frac{5}{7}$ de $58\frac{1}{3}$: or $\frac{1}{7}$ de $58\frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$; donc 5 fois $\frac{1}{7}$ ou $\frac{5}{7}$ de $58\frac{1}{3} = 5 \times 8\frac{1}{3} = 40 + \frac{5}{3} = 41\frac{2}{3}$, ainsi que nous l'avons déterminé.

Pour éviter l'embarras de résoudre les cas particuliers tels que le précédent, faisons que la résolution s'étende à tous les cas imaginables de cette espèce; c'est-là un des avantages les plus singuliers & les plus merveilleux de l'Algèbre.

Méthode générale de résoudre le Problême précédent, & tous ceux de cette espèce.

Soit $100 = a$, P M $= x$, & par conséquent M L $= a - x$; $5 = b$, $7 = c$: ainsi $\frac{5}{7} = \frac{b}{c}$ & $\frac{5x}{7} = \frac{bx}{c}$. On a vu dans la résolution précédente, que $\frac{5x}{7}$ étoit une expression de M L, pour ce cas particulier; en prenant donc la chose généralement, on aura M L $= \frac{bx}{c}$; or l'on a aussi M L $= a - x$; ainsi $\frac{bx}{c} = a - x$; ou (en multipliant par c) $bx = ac - cx$; donc en transposant, $bx + cx = ac$; c'est-à-dire, $\overline{b + c} \times x = ac$; & par conséquent $x = \frac{ac}{b+c}$. Cela signifie, que le plus grand des deux chemins x

ſe trouvera toujours égal au produit $a c$ de la diſtance a par le dénominateur c, diviſé par la ſomme $b + c$ du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{b}{c}$, qui exprime le rapport des deux chemins.

Veut-on, par exemple, que la diſtance $= 350$ lieues, & que l'un des Courriers en faſſe 3 tandis que l'autre en fait 8 ? alors $a = 350$, $b = 3$, $c = 8$. Ainſi $x = \frac{a c}{b + c}$ devient $x = \frac{350 \times 8}{11}$ $= \frac{2800}{11} = 254 + \frac{6}{11}$; le plus grand des deux chemins P M eſt donc de 254 lieues $+ \frac{6}{11}$; donc M L égalant $a - x$, ſera égal à 350 moins $254 + \frac{6}{11}$, ou M L $= 95 + \frac{5}{11}$.

Effectivement ces deux chemins réunis font exactement 350 : c'eſt une des conditions du Problême. Il faut voir à préſent ſi la ſeconde condition eſt remplie, c'eſt-à-dire, ſi 95 lieues $+ \frac{5}{11}$ qui font le plus petit chemin, font préciſément les $\frac{3}{8}$ du plus grand, ou de 254 lieues $+ \frac{6}{11}$. Or le huitième de $254 + \frac{6}{11}$ eſt $31 + \frac{9}{11}$; donc les $\frac{3}{8}$ font $\overline{31 + \frac{9}{11}} \times 3$, qui donnent préciſément 95 lieues $+ \frac{5}{11}$: ainſi l'un des chemins eſt préciſément les $\frac{3}{8}$ de l'autre, & c'eſt tout ce que l'on demandoit.

Que l'on faſſe quelles ſuppoſitions on voudra, l'équation $x = \frac{a c}{b + c}$ les réſoudra toutes, ſans aucune exception.

PROBLÊME V.

101. Un père a 35 ans, & ſon fils en a 13; on demande dans quel tems le père aura un âge double de celui du fils.

RÉSOLUTION.

J'appelle ce tems x. L'âge du père ſera donc $35 + x$, & celui du fils $13 + x$: mais, par la condition du Problême, à la fin de ce tems l'âge du père doit être double de celui du fils. Donc $35 + x = \overline{13 + x} \times 2 = 26 + 2x$. Ainſi, ôtant x de part & d'autre, $35 = 26 + x$; & tranſpoſant 26, on a $35 - 26 = x$, ou $9 = x$. Ce qui ſignifie que dans 9 ans l'âge du père ſera double de celui du fils. Effectivement ajoutez 9 à 35, l'âge du père ſera 44: ajoutez auſſi 9 à 13, vous aurez 22 pour l'âge du fils. Or 44 eſt préciſément le double de 22. Donc, &c.

Mais quel que ſoit l'âge du père & celui du fils, on réſoudra ſur le champ le Problême, en ſe donnant une formule. Suppoſons donc que l'âge du père ſoit $= p$; que celui du fils ſoit $= f$, & que le tems où l'un aura le double de l'autre, ſoit $= x$; on aura, par la condition du problême, $p + x = \overline{f + x} \times 2$, ou $p + x = 2f + 2x$. Otant x de part & d'autre, l'équation eſt $p = 2f + x$. Donc (en tranſpoſant $2f$) $p - 2f = x$; c'eſt-à dire, que pour trouver le tems où l'âge du père ſera double de l'âge du

fils, il n'y a toujours qu'à retrancher le double de l'âge du fils de l'âge du père; le reste de cette soustraction exprimera le tems auquel l'âge du père sera double de l'âge du fils.

Par exemple, le père a 27 ans, & son fils 11, de 27 ôtez le double de 11 = 22, le reste 5 fera voir que dans 5 ans le père sera une fois plus âgé que le fils; car dans 5 ans le fils aura 16 & le père 32.

102. Une formule, comme $p - 2f = x$, est d'une extrême commodité; elle fait découvrir tout-à-coup quand la résolution du Problême est possible, & quand elle ne l'est pas : car si $-2f$ est plus grand que p, on aura une grandeur négative, c'est-à dire, qu'il faudroit toujours ajouter quelque chose à l'âge du père, afin qu'il fût double de l'âge du fils; ainsi le Problême seroit impossible, en s'en tenant simplement à la supposition.

Par exemple, un père a 30 ans & son fils en a 19; je dis qu'il n'est pas possible que l'un ait jamais le double de l'autre, puisque, suivant la formule $p - 2f = x$, pour avoir la valeur de x, on doit retrancher $2f$, c'est-à-dire, le double de l'âge du fils, ou 38 de p ou de 30; ce qui est impossible, 38 étant plus grand que 30.

Si l'on demandoit que l'âge du père fût triple de celui du fils, on auroit l'équation $p + x = \overline{f + x} \times 3 = 3f + 3x$; donc $p = 3f + 2x$, ou $p - 3f = 2x$, & enfin $x = \frac{p - 3f}{2}$; c'est-à dire que pour avoir le tems x cherché, il faut ôter trois fois l'âge du fils de celui du père, & diviser cette différence par 2.

Veut-on que l'âge du père soit quadruple de celui

du fils? l'équation est alors $p + x = \overline{f + x} \times 4 = 4\,f + 4\,x$. Ainsi $p = 4\,f + 3\,x$, & $p - 4f = 3\,x$. Donc $x = \frac{p - 4\,f}{3}$. Cela signifie qu'en soustrayant quatre fois l'âge du fils de celui du père, & divisant la différence par 3, on a le tems demandé.

Remarquez qu'il régne ici une loi assez commode pour résoudre tous les cas imaginables de cette espèce. Quand on demande un âge double, le tems $x = p - 2\,f$, ou $x = \frac{p - 2\,f}{1}$. Est ce un âge triple? $x = \frac{p - 3\,f}{2}$. Est-il quadruple? on a $x = \frac{p - 4\,f}{3}$, &c. où l'on voit qu'il faut toujours ôter l'âge du fils de celui du père, autant de fois que ce dernier doit contenir le premier, & diviser le reste par un nombre plus petit de l'unité, que celui qui exprime combien de fois l'âge du père doit être plus grand que celui du fils; ce qu'une petite formule va démontrer de la maniére la plus précise.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE

Du Problême précédent.

Soit, comme ci-dessus, l'âge du père $= p$; celui du fils $= f$; x le tems qui doit s'écouler pour que le père ait un âge qui contienne autant de fois l'âge du fils qu'on le voudra; & soit appellé n ce nombre de fois.

Il est clair qu'après le tems écoulé, on a l'âge du père $= p + x$, & celui du fils $= f + x$; or dans cet état, l'âge du père $p + x$ doit contenir autant de fois celui du fils $f + x$, que

le nombre n contient d'unités ; c'eſt-à-dire, qu'il faudra multiplier par n l'âge du fils $f + x$, pour qu'il égale celui du père $p + x$. On a donc cette équation $p + x = \overline{f + x} \times n = fn + nx$. Donc (en tranſpoſant x & fn) $p - fn = nx - x = \overline{n - 1} \times x$; ainſi (en diviſant par $n - 1$) $x = \frac{p - fn}{n - 1}$, qui eſt l'expreſſion du tems x cherché pour tous les cas poſſibles, laquelle revient parfaitement à la loi dont on vient de parler : car l'équation $x = \frac{p - fn}{n - 1}$ ſignifie que l'on aura, dans tous les cas, le tems cherché x, en ſouſtrayant de l'âge du père p, celui du fils f autant de fois qu'il eſt marqué par le nombre n, qui montre combien de fois l'un doit contenir l'autre, & en diviſant ce reſte par ce même nombre n diminué de l'unité.

Par exemple, ſi un père a 71 ans & ſon fils 9, & que l'on demande dans quel tems le premier aura ſept fois plus d'âge que le ſecond ; alors $p = 71$, $f = 9$, $n = 7$; & l'équation $x = \frac{p - fn}{n - 1}$ devient $x = \frac{71 - 9 \times 7}{7 - 1} = \frac{71 - 63}{6} = \frac{8}{6} = 1 + \frac{1}{3}$, qui fait voir que ce ſera dans un an & 4 mois que le père aura 7 fois plus d'âge que ſon fils. Ce qu'il eſt trop aiſé de vérifier pour que j'y inſiſte davantage.

Vous pouvez juger, par ces petites formules, de l'étendue immenſe de l'Algèbre qui fait découvrir d'un trait de plume, non-ſeulement une infinité de problêmes, mais qui montre encore les limites de leur poſſibilité.

PROBLÊME VI.

103. La somme de deux grandeurs x, y, inconnues étant donnée avec la différence de ces grandeurs, déterminer leur valeur.

RÉSOLUTION.

Appellons s la somme de ces grandeurs; d leur différence : on aura $x + y = s$; & (supposant $x > y$) $x - y = d$. Ajoutons la première équation à la seconde, c'est-à-dire, le premier membre au premier membre, & le second au second, il en viendra une unique équation $x + y + x - y = s + d$, de laquelle effaçant $+ y$ & $- y$ qui se détruisent, il reste $x + x$ ou $2x = s + d$. Ainsi $x = \frac{s+d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$: cela signifie que la plus grande des deux quantités est égale à la moitié de la somme de ces quantités, plus la moitié de leur différence, qui sont des grandeurs données. La plus petite est donc aussi connue, à cause que la somme est donnée.

Cependant si l'on vouloit connoître la plus petite indépendamment de la plus grande, en reprenant les deux équations $x + y = s$, & $x - y = d$, on retrancheroit la seconde de la première, c'est-à dire, le premier membre du premier membre, & le second du second, pour avoir $x + y - x + y = s - d$, ou (en effaçant ce qui se détruit) $y + y = s - d = 2y$. Donc $\frac{s-d}{2} = y$, ou $\frac{s}{2} - \frac{d}{2} = y$, ce qui veut dire que la plus petite des deux grandeurs est égale à la

moitié de la ſomme de ces grandeurs moins la moitié de leur différence.

Soit, par exemple, la ſomme de deux nombres inconnus = 75, & leur différence = 17. Pour avoir le plus grand de ces deux nombres, prenez la moitié de leur ſomme = $37\frac{1}{2}$, & la moitié de de leur différence = $8\frac{1}{2}$, ajoutez $37\frac{1}{2}$ à $8\frac{1}{2}$: vous aurez 46 pour la valeur du plus grand des deux nombres. Voulez-vous le plus petit ? de $37\frac{1}{2}$ ôtez $8\frac{1}{2}$, le reſte 29 ſera le nombre cherché.

On juge que les deux nombres 46 & 29 ſont les véritables nombres cherchés, parce qu'ils ſatiſfont aux deux conditions du problême; car ajoutez 46 à 29 vous aurez 75, c'eſt la première condition. Otez 29 de 46, la différence eſt 17, c'eſt la ſeconde condition du problême; ainſi les deux nombres trouvés réſolvent la queſtion.

On doit faire attention à la réſolution de ce problême : il n'eſt pas en lui-même fort important; mais il conduit quelquefois à la réſolution de très-beaux problêmes, ainſi qu'on le verra dans la Trigonométrie par les Sinus, qui eſt à la fin de cet Ouvrage.

PROBLÊME VII.

La conſtruction d'un Canal ayant été miſe à l'enchère *, trois Compagnies ſe ſont préſentées. La première a offert d'en achever l'ouvrage en 20 mois, la ſeconde en 15, & la troiſième en 12.

* On dit que l'on met une entrepriſe *à l'enchère*, quand on en propoſe les frais de l'exécution à différens particuliers ou à différentes Compagnies, afin que chacun y mette ſon prix, & que l'on puiſſe ſe déterminer en faveur de celui qui paroîtra le plus avantageux.

Si l'on avoit employé à la fois ces trois Compagnies, en ſuppoſant qu'elles euſſent tenu parole exactement, en combien de tems auroient-elles fini cette entrepriſe ?

RÉSOLUTION.

Appellons c la conſtruction du Canal propoſé. Il eſt clair que dans l'eſpace d'un mois la première Compagnie auroit fait la vingtième partie de l'ouvrage, c'eſt-à-dire, $\frac{c}{20}$; que dans le même tems la ſeconde auroit fait $\frac{c}{15}$, & la troiſième $= \frac{c}{12}$; par conſéquent la partie du Canal faite en un mois feroit $\frac{c}{20} + \frac{c}{15} + \frac{c}{12}$; & ſi l'on réduit ces fractions à la même dénomination, on trouvera que leur ſomme $= \frac{12c}{60} = \frac{c}{5}$. C'eſt-à dire, que la cinquième partie du Canal ſera faite en un mois par les travaux réunis des trois Compagnies. Faites après cela ce raiſonnement : Si la cinquième partie de l'ouvrage exige 1 mois pour être faite, pour la conſtruction entière c quel tems x faudra-t-il ? C'eſt une ſimple règle de Trois, où il faut multiplier le ſecond terme 1 par le troiſième c, & diviſer le produit c par $\frac{c}{5}$, qui donnera pour quatrième terme $x = \frac{5c}{c} = 5$, qui démontre qu'en 5 mois cette opération ſera finie. Cela étoit même évident ſans proportion ; étant on ne peut pas plus clair, que ſi l'on fait en un mois la cinquième partie d'un ouvrage, on fera le tout en 5 mois.

On prouvera que, par la réunion des trois Compagnies, la construction du Canal s'achèvera en 5 mois, si l'on fait attention qu'en 5 mois la première Compagnie en fera $\frac{1}{4}$ (5 étant $\frac{1}{4}$ de 20). La seconde en fera $\frac{1}{3}$ (parce que 5 est $\frac{1}{3}$ de 15); & la troisième en fera les $\frac{5}{12}$; puisque 1 mois étant $\frac{1}{12}$ de 12, 5 mois en doivent être les $\frac{5}{12}$: or $\frac{1}{4}$ de l'ouvrage $+ \frac{1}{3} + \frac{5}{12}$ font exactement l'ouvrage entier, comme l'on peut s'en convaincre en mettant en douzièmes les trois fractions $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12}$ de l'ouvrage : c'est l'ouvrage entier.

Voilà un assez grand nombre de problêmes où l'inconnue ne monte qu'au premier degré (*b*). Il n'est point rare que les affaires de la vie commune mènent à des questions dont les inconnues s'élèvent au second, comme on va le voir par la question suivante, qui peut avoir son utilité en Justice réglée.

PROBLÊME VIII.

Un pére en mourant laisse 200 Louis de rente à son fils mineur. On nomme un Tuteur pour administrer ce bien, & il est tenu de l'améliorer ou de

(*b*) Il ne faut pas croire que la facilité ou la difficulté de résoudre un problême dépende du degré auquel s'élève l'inconnue; de manière qu'un problême du premier degré soit plus aisé qu'un autre du second; que celui-ci le soit plus que s'il étoit du troisième, &c. Un problême mis une fois en équation, on a trouvé des règles pour en faire l'analyse, ou en dégager les inconnues; mais il n'y en a point pour le mettre en équation : c'est le génie naturel ou perfectionné par la méditation, qui fait concevoir une question bien exposée, & qui met à portée d'en exprimer exactement tous les rapports. Or il arrive assez souvent que les rapports d'un problême du second degré sont en plus petit nombre, moins compliqués, plus sensibles que ceux d'un autre du premier degré; soit parce que les données de ce dernier sont moins faciles à saisir, soit parce qu'il faut aller les chercher assez loin, & les créer en quelque sorte, ainsi que je le ferai voir, quand nous en serons au problême de *la couronne de Hiéron*, Tom. II. n. 269.

l'augmenter autant qu'il est en lui. Comme le Mineur peut subsister en partie par une profession honnête, il est arrivé qu'au bout de l'année il n'a dépensé que 100 Louis de son revenu. Le Tuteur a mis en rente sur le champ les 100 Louis d'épargne, & a augmenté par-là le revenu annuel de son pupille. On ignore à quel denier (*c*) il a fait l'acquisition de cette nouvelle rente; mais le Mineur ayant dépensé la seconde année 130 Louis sur tout son revenu, le surplus a encore été placé en rente à l'instant, au même denier que la première fois; & la tutelle étant finie quelques jours après, on a trouvé que dans cet espace de deux ans le revenu du jeune homme étoit augmenté de 14 Louis de rente $+ \frac{31}{36}$ de Louis; ce qui fait 14 Louis 20 liv. 13 s. 4 den. = 356 liv. 13 s. 4 den. On demande à quel denier le Tuteur a placé les épargnes faites pendant son administration.

(*c*) On ignore *à quel denier*, &c. Quand on met de l'argent en rente, celui qui le reçoit s'oblige, sur tous ses biens, pour lui, pour ses héritiers, ou pour tous ceux qui lui seront substitués, de payer tous les ans au prêteur, ou à ses ayants cause, un revenu appellé *rente*. Cette rente se règle communément sur les loix du Gouvernement sous lequel on vit. En France on peut avoir 5 pour 100 par an de l'argent mis en rente; & comme 5 est le vingtième de 100, cela s'appelle acquérir *au denier* 20. Si l'on recevoit 4 pour 100, ce seroit une rente *au denier* 25, parce que 4 est le vingt-cinquième de 100. Quand on a 10 pour 100, c'est de l'argent placé *au denier* 10, puisque 10 est le dixième de cent, &c.

Suivant cette explication, le nombre par lequel on divise l'argent que l'on met en rente, pour sçavoir ce qu'elle produira par an, exprime toujours *à quel denier* est cette rente; ce qu'il est essentiel de bien remarquer. Par exemple, vous avez placé 600 livres au denier 25, & vous voulez sçavoir ce que cela vous produira par an? Divisez 600 par 25, vous trouverez 24 livres pour le revenu annuel de vos 600 livres; par conséquent, si l'on avoit demandé *à quel denier x* on a placé 600 livres, quand on en reçoit 24 liv. par an, en faisant $\frac{600}{x} = 24$, & résolvant cette équation, d'où l'on tire $x = \frac{600}{24} = 25$, on verroit que l'on a placé son argent au denier 25. Voilà l'unique théorie sur laquelle est fondée l'équation du Problème auquel appartient cette Note.

RÉSOLUTION.

Soient appellés a les 100 Louis d'épargne, x le denier auquel on les a placés, d les 14 Louis & $\frac{31}{36}$, dont le revenu annuel du Mineur a été augmenté à la fin de la tutelle. On a vu en lisant la note (c), que pour avoir le produit de 100 Louis, mis en rente, après la révolution de la première année, il faut diviser $100 = a$ par le denier x de la rente; ainsi $\frac{a}{x}$ exprimera l'augmentation de la rente au bout de la première année. Au commencement de la seconde année de la tutelle le revenu annuel du pupille est donc 100 Louis $+ \frac{a}{x}$; & comme dans le cours de cette seconde année il a dépensé 130 Louis, les épargnes à la fin de la seconde année sont 70 Louis $+ \frac{a}{x}$; & faisant $70 = b$, les épargnes de la seconde année seront $b + \frac{a}{x}$. On les met en rente au même denier x que la première année. Pour avoir le produit de cette nouvelle rente, il faut donc diviser $b + \frac{a}{x}$ par le denier x, comme l'on a déja fait : ce qui donnera $\frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$ pour l'augmentation de la rente à la fin de la seconde année. Après la première le revenu a été déja augmenté de $\frac{a}{x}$. Ainsi son augmentation totale, à la fin des deux ans de tutelle, est $= \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$. Or par une des conditions du problême, cette même augmentation $= 14$ Louis & $\frac{31}{36} = d$; ce qui fournit cette équation du

second degré, $d = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$. Multipliant le tout par x^2, on aura $dx^2 = ax + bx + a$; & (en transposant) elle devient $dx^2 - ax - bx = a$; ou (en divisant le tout par d) $x^2 - \frac{ax - bx}{d} = \frac{a}{d}$; laquelle devient $x^2 - \overline{\frac{a-b}{d}} \times x$; & faisant (pour la facilité du calcul), $\frac{-a-b}{d} = -f$, on aura $x^2 - fx = \frac{a}{d}$; équation du second degré, dont le premier membre $x^2 - fx$ est un quarré imparfait qu'il faut completter, pour être en état qu'on en extraie la racine quarrée. On a vû (nº. 92.) que cela se faisoit en ajoûtant à chaque membre de cette équation le quarré $\frac{f^2}{4}$ de $-\frac{f}{2}$, moitié du coëfficient $-f$, qui multiplie l'inconnue x dans le second terme du premier membre. Alors l'équation devient $x^2 - fx + \frac{f^2}{4} = \frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}$; donc $\sqrt[2]{x^2 - fx + \frac{f^2}{4}} = \sqrt[2]{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$, c'est-à-dire (nº. 77.), $x - \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$; & enfin $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$. Ainsi, en substituant dans le second membre de cette équation les nombres représentés par les lettres a, d, f, extrayant ensuite la racine quarrée, on trouvera que le denier cherché $x = 12$; c'est à-dire, que le Tuteur a placé l'argent de son pupille au 12[e] den. Et si l'augmentation de la rente du Mineur s'étoit trouvée de 18 Louis, c'est-à-dire, si l'on avoit fait $d = 18$, on auroit eu $x = 10$; ainsi les épargnes auroient été placées au denier 10.

Comme les Commençans pourroient se trouver embarrassés dans la substitution des nombres en la place des quantités Algébriques, je vais les conduire ici pas à pas, afin qu'ils aient un modèle qu'ils puissent imiter dans la suite.

Ils se rappelleront que $100 = a$, $70 = b$, & dans la supposition que la rente s'est accrue de 14 Louis $+ \frac{31}{36}$, on a $14 + \frac{31}{36} = \frac{535}{36} = d$. Ils se rappelleront aussi que $f = \frac{a+b}{d} = \frac{170}{\frac{535}{36}}$, qui devient (en divisant le numérateur & le dénominateur par 5) $= \frac{34}{\frac{107}{36}} = \frac{1224}{107}$; par conséquent $f = \frac{1224}{107}$; ainsi $\frac{f}{2} = \frac{612}{107}$, & $\frac{f^2}{4} = \frac{f}{2} \times \frac{f}{2} = \frac{612}{107} \times \frac{612}{107} = \frac{374544}{11449}$, & $\frac{a}{d} = \frac{100}{\frac{535}{36}}$ (en divisant son numérateur & son dénominateur par 5) $= \frac{20}{\frac{107}{36}} = \frac{720}{107} = \frac{720 \times 107}{107 \times 107}$ (n°. 21.) $= \frac{77040}{11449}$; par conséquent l'équation $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}} = \frac{612}{107} + \sqrt{\frac{77040 + 374544}{11449}} = \frac{612}{107} + \sqrt{\frac{451584}{11449}}$; laquelle (en extrayant la racine quarrée du numérateur & du dénominateur de la fraction, qui est sous le signe radical) devient $= \frac{612}{107} + \frac{672}{107} = \frac{1284}{107} = 12$, ainsi qu'on devoit le trouver.

Effectivement, si l'on prend le douzième de 100 Louis, mis en rente après la première année de la tutelle, on aura $\frac{100}{12}$, & la rente totale du Mineur est alors $= 200 + \frac{100}{12}$, de laquelle ôtant 130 Louis dépensés dans le cours de la séconde année, il reste $70 + \frac{100}{12}$ d'épargnes à la fin de la séconde année, lesquels mis en rente au denier 12 produisent $\frac{70}{12} + \frac{100}{12 \times 12}$, pour l'augmentation

de

de la rente provenue des épargnes de la seconde année : en y joignant les $\frac{100}{12}$, dont elle s'est accrue la première, l'augmentation totale sera $\frac{100}{12} + \frac{70}{12} + \frac{100}{144} =$ (en réduisant à la même dénomination) $\frac{300}{36} + \frac{210}{36} + \frac{25}{36} = \frac{535}{36} = 14 + \frac{31}{36}$, précisément comme on l'a supposé dans la question.

Si l'on veut calculer le second cas, dans lequel l'accroissement de la rente est de 18 Louis, alors $d = 18$; $f = \frac{a+b}{d} = \frac{170}{18}$; $\frac{f}{2} = \frac{85}{18}$; $\frac{f^2}{4} = \frac{f}{2} \times \frac{f}{2} = \frac{85}{18} \times \frac{85}{18} = \frac{7225}{324}$; $\frac{a}{d} = \frac{100}{18} = \frac{100 \times 18}{18 \times 18}$ (n°. 21.) $= \frac{1800}{324}$; par conséquent l'équation $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}} = \frac{85}{18} + \sqrt{\frac{1800}{324} + \frac{7225}{324}} = \frac{85}{18} + \sqrt{\frac{9025}{324}}$; & en extrayant la racine quarrée qui se présente, on trouve $x = \frac{85}{18} + \frac{95}{18} = \frac{180}{18} = 10$, qui montre que l'argent des épargnes à été placé au dixième denier.

Car si l'on prend le dixième de 100, mis en rente la première année, & le dixième de $70 + \frac{100}{10}$ que l'on y a mis à la fin de la seconde, on aura $\frac{100}{10} + \frac{70}{10} + \frac{100}{10 \times 10} = 10 + 7 + 1 = 18$ pour l'accroissement total de la rente ; & c'est ce que l'on avoit supposé pour le second cas.

L'expression de ce Problême aura toute la généralité dont il est susceptible, si on en désigne toutes les données par des quantités algébriques. Quelle que soit la rente r que le père laisse à son fils ; quelles que soient les dépenses a de la première année, & celles b de la seconde ; quel que soit l'accroissement d de la rente après les deux années de tutelle, on trouvera toujours à quel degré x

on a placé les épargnes, en résolvant une équation du second degré.

Car l'épargne de la première année étant $r-a$, son produit, mis en rente à un denier quelconque x, sera $\frac{r-a}{x}$; ainsi, à la fin de la première année, toute la rente du Pupille sera $r+\frac{r-a}{x}$, d'où soustrayant la dépense b de la seconde année, on aura pour l'épargne de cette seconde année $r-b+\frac{r-a}{x}$; & en la mettant en rente au même denier x que ci-dessus, son produit sera $\frac{r-b}{x}+\frac{r-a}{x^2}$; si l'on y joint $\frac{r-a}{x}$, qui est la rente de l'épargne produite dans la première année, toute l'augmentation de la rente, à la fin des deux années de tutelle, sera exprimée par $\frac{r-a}{x}+\frac{r-b}{x}+\frac{r-a}{x^2}=\frac{2r-a-b}{x}+\frac{r-a}{x^2}$: si l'on fait (pour faciliter le calcul) $2r-a-b=m$, & $r-a=c$, toute l'augmentation sera $=\frac{m}{x}+\frac{c}{x^2}$. Or (supp.) ce même accroissement $=d$; l'on a donc cette équation, $\frac{m}{x}+\frac{c}{x^2}=d$; & (en multipliant le tout par x^2) elle devient $mx+c=dx^2$, ou $c=dx^2-mx$; & (divisant par d) l'on aura $\frac{c}{d}=x^2-\frac{mx}{d}$: équation du second degré, que l'on résoudra comme ci-dessus, quelles qu'en soient les données.

Il sera aisé d'observer qu'en supposant de nouvelles épargnes mises en rentes, l'équation monteroit au troisieme degré, si la tutelle duroit trois ans; au quatrième, si elle en duroit 4; & qu'ainsi ce problême est de nature à parcourir tous les degrés

imaginables. Ce qui démontre que le commerce & les loix de la société jettent dans des équations de toutes sortes de degrés.

Ce n'est donc pas une curiosité stérile que de rechercher des méthodes pour résoudre des équations d'un degré quelconque (*a*), puisqu'elles doivent leurs naissance à des besoins très-communs : mais ne m'étant pas proposé ces recherches dans cet Ouvrage, je me borne à celles auxquelles mon plan m'assujettit.

(*a*) L'Algèbre est aujourd'hui si indispensable, elle procure tant de commodités dans l'acquisition des sciences, sur tout de l'Arithmétique & de la Géométrie, qu'en s'opiniâtrant à se passer de cet instrument, on pourroit les étudier toute sa vie, & y être fort médiocre, quoique l'on eût un très-bon esprit.

C'est que l'Algèbre, avec un très-petit nombre de symboles, présente dans un tableau, le plus racourci que l'on connoisse, les rapports des quantités inconnues, comme ceux des grandeurs connues. On résout, par ce moyen, une infinité de cas à la fois; on a sous les yeux tous les matériaux de son raisonnement. Sans cela la mémoire est accablée de leur multiplicité, & l'imagination s'épuise. Car en Mathématiques, il faut se représenter assez souvent ce qui ne sçauroit être l'objet des sens, comme des quantités indéterminées, tous les cas infinis d'une même question, les rapports des grandeurs connues aux inconnues, &c.

Mais n'y a-t-il pas eu de très-grands Géometres sans l'Algèbre ? Euclide, Archimede, Apollonius, &c. ne le cèdent à aucun des modernes. C'est-à-dire, qu'il y a eu de très grands génies en Mathématiques qui ignoroient l'Algèbre, quoique cela soit contesté.

Mais on doit faire attention que la Nature fait le génie, & que l'art le développe. Les machines ne font point la force naturelle des hommes, elles l'augmentent. Il y a plus, les forces naturelles ne sont presque rien en comparaison des acquises. Donnez une machine à rouage, donnez un simple Cric à un enfant qui ne sçaura que remuer les bras, & que tous les Hercules du monde luttent contre sa foiblesse appliquée à cette machine; les voilà emportés au premier ébranlement. C'est l'image de l'Algèbre; les découvertes qui avoient résisté à plusieurs milliers de siecles, se sont rendues à ses premieres attaques. Sans son appui, c'étoit beaucoup autrefois que d'être un médiocre Géomètre; aujourd'hui, avec son secours, & sans que la nature en fasse plus de frais, on peut être à la fois grand Mathématicien, Philosophe, Orateur, Historien, Politique, témoin M. Leibnitz qui est presque de nos jours. Sans l'Algèbre il n'eût été utile que de quelques manières; avec l'Algèbre il l'a été de toutes.

C'est donc un très-grand abus de la confiance publique, & une espèce de vol fait à la société, que de supprimer l'usage de l'Algè-

AVERTISSEMENT.

MESSIEURS les Professeurs qui me font l'honneur d'enseigner cet Ouvrage dans leurs Cours de Philosophie, peuvent sans aucun inconvénient passer tout de suite au premier Chapitre de la Géométrie. Les Problêmes suivans, très-utiles dans le commerce, ne seroient, pour la plûpart de leurs disciples, qu'un objet de curiosité; & ils se doivent au plus grand nombre. D'un autre côté leur tems est court; beaucoup de principes & peu de détails; on ne sçauroit qu'approuver cette méthode. Un Voyageur obligé de passer vîte dans un pays, n'en observe que les grandes masses, les plaines, les montagnes, les rivières, les prairies, &c. c'est à ceux qui y séjournent à en parcourir les différentes parties, suivant leurs différentes vues.

Il n'en est pas ainsi de cet Ouvrage; il faut qu'il renferme les principes, & les applications des principes. Ceux qui exercent ou qui se proposent d'exercer des Professions auxquelles les Mathématiques apportent de grandes facilités, pourront me sçavoir quelque gré de leur avoir rendu l'Algèbre recommandable, par les services qu'ils en recevront. J'ai voulu en donner le goût à tout le monde; & il m'a paru que l'utile étoit l'appât le plus universel. On prend un état quand on cesse d'être écolier. Le Ministre de la Religion, le Marchand, le Militaire, l'Agriculteur,

bre dans l'étude des Mathématiques. On donne des entraves à l'esprit d'invention, de la répugnance pour l'étude de ces sciences, dont les difficultés désespèrent; & l'on immole l'amour du bien public à la mesquinerie de ses petits intérêts particuliers de fortune & d'amour propre.

le Jurisconsulte, le Navigateur, l'Architecte, le Financier, pourront lire ce Traité avec fruit. Tous ces états sont entrés dans mes vues, mais n'entrent pas dans celles d'un disciple qui fait ses études.

J'avancerai néanmoins, avec quelque confiance, qu'il n'y a aucun état au-dessus du simple ouvrier qui subsiste du travail de ses mains, auquel les connoissances des premiers élémens de l'Arithmétique & de la Géométrie ne procurent de grands avantages. Malgré les préventions reçues & les clameurs d'habitudes antérieures, les Ministres même de la Religion (le premier de tous les états), Messieurs les Curés & les Vicaires destinés à en faire le Service dans les campagnes, trouveront dans ces sciences un grand préservatif contre l'ennui, &, ce que l'on n'a pas cru jusqu'à présent, un degré de considération très-solide & très-légitime.

Il est certain qu'avec les gens de la campagne, en général, il n'est question que de pratique, & jamais de dispute de Religion. C'est le dogme, & non la controverse qu'on doit leur proposer. La Religion est un fait, il ne faut pas en faire un problême. Il est fort simple d'apprendre des faits & de les communiquer. Les mœurs de ces bonnes gens sont assez uniformes; il est rare & difficile qu'elles soient inconnues: ils n'ont guères le tems d'imaginer, & encore moins celui de pratiquer le rafinement des passions. Avec une petite portion de jugement, avec un travail fort léger on peut donc les pénétrer & les instruire; & l'on a du tems de reste. Il sera rempli délicieusement & avec un avantage inattendu, par le Ministre de la Religion, qui appliquera l'Arithmétique & la Géométrie à leurs usages & à leurs besoins.

Que l'on se rappelle la considération des anciens Prêtres Egyptiens; elle n'étoit pas uniquement fondée

ſur ce qu'ils étoient les dépoſitaires & les organes des myſteres de leur Religion ; mais ſur ce que l'on ne trouvoit guères que parmi eux des Géomètres, des Médecins, des Aſtronomes, ils jouiſſoient du plus doux & du plus ſublime des Empires, de l'Empire ſur les eſprits.

Tout homme à qui l'on a recours, eſt, par le jugement de la nature, ſupérieur en cette partie à ceux qui ont beſoin de lui, en ſuppoſant que les ſervices ſollicités n'entrent point dans les devoirs de celui que l'on ſollicite. Naturellement nous nous ſentons pénétrés de reſpect pour les perſonnes qui ont plus de connoiſſances & plus de lumieres que nous. Si ces connoiſſances ſont immédiatement appliquées à nous ſoulager gratuitement dans nos beſoins, ou à augmenter notre bien-être, ce reſpect parvient à ſon comble.

Les gens de la campagne vendent, achetent, échangent, louent à chaque inſtant des Terres, des Bois, des Vignes, des Vergers, des Prairies, des Jardins : cela occaſionne tous les jours des démêlés en Juſtice ; cela demande que l'on toiſe, que l'on arpente, qu'on lève des Plans. Les Arpenteurs coûtent, & on n'en a pas toujours à ſa portée. Si le Miniſtre de la Religion eſt capable, & qu'il ſe faſſe un devoir de conduire ces opérations, il acquerra l'autorité la plus méritée, la plus ſolide & la plus inconteſtable ; elle n'aura pour baſe que des talens & des bienfaits.

Et ſi ce que je vais ſimplement indiquer n'étoit pas un hors-d'œuvre, quelques connoiſſances des Loix & des Coutumes, des Simples & des Remedes les plus communs, les rendroient les Arbitres & les Sauveurs de ces pauvres gens. On ne connoît pas tous les avantages d'une Raiſon utilement cultivée, qui tourne au profit des autres. Que les Miniſtres de la Religion s'aviſent toujours d'être des hommes, on les regardera comme des Dieux.

QUoique les Problêmes de pure curiosité ne laissent pas d'avoir leurs avantages (*a*), continuons de donner nos attentions aux questions utiles. En

(*a*) *Ne laissent pas d'avoir leurs avantages.* L'utile sent toujours un peu la servitude, & le curieux la liberté; c'est la raison pourquoi on se sent comme entraîné vers les objets de pure curiosité. Le nécessaire nous est dicté par les plus forts de tous les instincts, la faim & la soif : la découverte en a été bientôt faite; il n'a fallu qu'exister. Pour passer de l'indispensable à l'utile, on a eu plus besoin d'intelligence que d'instinct. Tentatives, recherches, combinaisons; ce sont des productions du génie, qui ont commencé à mettre l'homme à son aise dans l'état de la société.

L'aisance rapproche de l'état primitif, où l'on n'a affaire qu'à ses sensations. Dégagée des liens de la première nécessité, libre des soins que comporte l'utile, l'ame a pris son vol sublime vers le curieux. Là, contente de son existence, dont elle mesure la grandeur sur l'immensité qu'elle contemple, elle enfante ces prodiges de l'art, qui permettent à peine à l'homme d'y reconnoître l'homme.

On conviendra qu'il faut plus de génie pour faire une belle étoffe que pour faire du pain; & beaucoup plus pour diriger le cours d'un Vaisseau, dont le chemin s'efface à mesure qu'il se fait. Cependant l'étoffe & le Vaisseau ont commencé par être des objets de pure curiosité. Si l'on s'étoit borné au simple utile, rélativement aux besoins & aux connoissances actuelles, nous ne serions guères plus avancés qu'on ne l'étoit au commencement du monde.

Il est donc très-avantageux pour un Etat d'y entretenir des Sociétés de gens d'esprit & de génie; ne fussent elles uniquement occupées que de choses agréables & curieuses, elles ne seroient pas long-tems sans être utiles : plusieurs le deviennent dès leur naissance, comme le Thermomètre, le Télescope, les Cartes terrestres & marines, &c.

Mais il y a une considération d'une toute autre importance, qui doit y déterminer aujourd'hui. On est environné dans l'Europe de Nations jalouses, qui se disputent perpétuellement l'empire des richesses, de la force, de l'esprit & du génie. Si chaque peuple n'a pas l'attention d'entretenir, à tous ces égards, une sorte d'équilibre; on peut prédire, sans crainte de se tromper, que la Nation la plus éclairée subjuguera ses voisines, ou par ses armes, ou par ses goûts.

C'est qu'en se faisant un métier de penser, on pense aisément au besoin; c'est que le raffinement des idées dispose à l'esprit d'invention. Les Grecs étoient plus éclairés que les Perses & que les Scythes. Alexandre avec quarante mille combattans en renverse plusieurs centaines de mille. Fernand Cortez en savoit un peu plus que vingt millions d'Amériquains, qu'il subjugua & détruisit avec cinq ou six cens Cavaliers. C'en étoit fait de la Moscovie, Empire immense & assez peuplé; elle passoit sous le joug des Suédois, (nation fort éclairée, & d'un territoire très petit en comparaison de sa rivale) sans les leçons que donna aux Russes l'imprudence de Charles XII, & sans le génie du grand Pierre, enrichi des Arts de toute l'Europe.

voici qui le sont beaucoup dans le commerce. Il y est d'usage, quand on vend à d'autres Marchands, dont l'état est de revendre, d'accorder quelque tems de crédit : or il peut arriver que les affaires d'un Marchand auquel on fait crédit, soient tellement disposées, qu'il puisse faire son paiement sur le champ, ou l'anticiper de quelque tems. Mais comme le crédit est un avantage accordé au débiteur, & qu'il ne seroit ni juste ni prudent de l'en priver, dans le cas d'un paiement anticipé, on lui fait une remise, en faveur de l'argent dont il se défait

Présentement même que j'écris ceci, (le 15 Mars 1757.) les pacifiques Quakers, habitants de la Pensilvanie, viennent d'être les victimes de leurs vertus. Par principe de Religion, ils se sont défendu l'art (malheureusement nécessaire) de verser le sang humain ; & on verse le leur sans mesure. S'ils avoient appliqué les Mathématiques aux Arts de Génie qui ont rapport à la conservation des hommes, ils n'auroient point été la proie d'ignorans comme les Sauvages, dont ils viennent d'éprouver la férocité. Peut-être même les auroient-ils contenus avec un sçavoir très-imparfait de l'Art militaire, si les mouvemens de ces mêmes Sauvages n'eussent été dirigés par une Nation sçavante, toujours brave contre les ennemis à vaincre, mais toujours clémente & généreuse envers les vaincus.

Et puisque mon sujet m'y a conduit, je vais faire part à mes Lecteurs d'une observation, laquelle peut toute seule faire gagner aux Lettres le procès qu'on leur a intenté ces dernières années-ci.

L'Auteur a très-bien fait d'employer le prestige de l'Eloquence, cet Art (comme je le dis ailleurs) de persuader indépendamment des raisons. Mais ces talens eussent été beaucoup mieux employés à nous indiquer de nouveaux moyens de perfectionner l'état où nous sommes, qu'à nous en faire désirer un autre qu'il est comme impossible, & qu'il seroit fort dangereux d'obtenir. Je ne ferai point un grand échaffaudage ; je n'irai point chercher mes preuves dans les forêts, parmi les Sauvages que nous ne connoissons pas trop bien. Sans sortir de chez nous, nous y trouverons plus sûrement & à la fois les sociétés & les forets. On y verra que le Soldat François, très-ignorant, comme par-tout ailleurs, est naturellement barbare, destructif, faisant le mal pour le mal, uniquement pour le plaisir de détruire ; au lieu que les Officiers, dont l'éducation est cultivée, sçavent aller à l'ennemi ou l'attendre avec fermeté, le combattre avec audace, le vaincre avec retenue, lui pardonner sans réserve, & le secourir sans délai. Vous verrez la même chose en Angleterre, où la Noblesse, une des plus éclairées qu'il y ait au monde, est aussi très bienfaisante, & des plus généreuses envers ses ennemis vaincus ; tandis que le Peuple, sans autre guide que son instinct, est toujours livré à la férocité de ses sensations.

avant l'échéance; & cette remise s'appelle *Escompte*, c'est-à-dire une somme mise hors de compte.

L'Escompte ne fait point de tort au *Créancier* [on appelle ainsi celui qui fait crédit] : car s'il a jugé convenable à son économie de faire crédit, il retrouve cet avantage dans l'argent comptant qu'il reçoit, quoiqu'en moindre quantité; parce qu'en le remettant sur le champ dans le commerce, il peut regagner le bénéfice de l'Escompte accordé. Le commerce trouve donc dans l'*Escompte* un principe de vie qui l'anime; il en faut par conséquent étudier les règles, afin de le tenir dans les bornes de la justice, rélativement aux usages reçus dans le commerce des différentes Nations.

PROBLÊME IX.

Vous avez vendu pour 3850 livres de marchandises, à un an de crédit; & vous consentez de remettre à l'acheteur 10 pour 100, s'il vous paie sur le champ. Quel doit être l'Escompte?

RÉSOLUTION.

Avant de procéder à la résolution, remarquez bien que les 10 pour 100, dont on propose la remise, s'entendent ici de 10 pour cent par an; c'est-à-dire, que l'on suppose que le débiteur auroit gagné, au bout d'un an, 10 pour cent sur la marchandise dont on lui fait crédit. Donc, si on lui remèttoit 10 pour cent dès le commencement de cette année, on lui remettroit trop : car cette remise regagnant 10 pour cent dans le cours de l'année, il arriveroit que le débiteur auroit gagné, à la fin du terme, plus de 10 pour cent sur toute la

marchandise ; ce qui n'est pas la convention. Cela ne se réduit donc pas à une simple règle de Trois, comme la question sembloit l'insinuer d'abord, en disant : si 100 donne 10, combien produiront 3850 ? l'on trouveroit 385 livres pour l'escompte, lesquelles ôtées de 3850 paroîtroient démontrer que le débiteur ne doit payer sur le champ que 3465 livres ; ce qui assurément ne suffit pas : car, si le créancier vouloit remettre dans le commerce ces 3465 livres, à 10 pour cent de bénéfice par an, cela ne lui produiroit que 346 livres 10 sols, lesquelles jointes au capital 3465 livres, ne font que 3811 livres 10 sols au bout de l'année, au lieu de 3850 livres qu'il auroit reçues, s'il n'avoit pas escompté : il faut donc considérer la question de manière que le créancier retrouve juste, au bout de l'année, ces 3850 livres, c'est-à dire que l'argent qui lui restera après l'escompte, soit tel qu'en le faisant valoir à 10 pour cent par an, cet argent, joint à son bénéfice, procure justement au bout de l'année 3850 livres.

Soit pour cela appellé x l'argent qui doit rester au créancier après l'escompte : puisque cet argent doit gagner 10 pour cent, c'est-à-dire la dixième partie de cette somme, on aura $\frac{x}{10}$ pour le gain de x au bout de l'an ; & ces deux quantités réunies doivent faire 3850 livres. Voilà donc l'équation qui résoudra le problême $x + \frac{x}{10} = 3850$ livres. Donc, en multipliant par 10, pour faire évanouir la fraction, on aura $10x + x$ ou $11x = 38500$. Ainsi $x = \frac{38500}{11} = 3500$; ce qui signifie que le débiteur doit payer sur le champ à son créancier 3500 livres. Et l'on voit que cela doit être ; car si le créancier remettoit ces 3500 livres dans le commerce, à 10 pour cent de

bénéfice par an, il gagneroit 350 livres, lesquelles ajoutées à son capital * de 3500 livres, feroient juste au bout de l'année les 3850 livres qu'il auroit reçues de son débiteur, si on ne lui avoit pas fait l'escompte. La remise ou l'escompte est donc de 350 livres.

Prenons la chose d'un autre côté. 3850 livres à 10 pour cent de bénéfice par an, donnent au bout de l'année 385 livres de gain pour la personne à laquelle on fait crédit de ces 3850 livres; il ne faut donc remettre au débiteur, qui s'acquire dès le commencement de l'année, qu'une somme, laquelle jointe à son intérêt à 10 pour cent au bout de l'an, lui procure juste 385 livres de bénéfice. On fera donc cette équation : la somme x qu'on doit remettre au débiteur sur le champ, plus la dixième partie de cette même somme, dont il retirera l'intérêt dans le cours d'une année, doivent égaler 385 livres, ou plus simplement $x + \frac{x}{10} = 385$ livres. Donc, comme ci-dessus, $11x = 3850$. Ainsi $x = \frac{3850}{11}$ $= 350$ livres, ainsi qu'on l'a déja vu, pour la valeur de l'escompte. Et cela est très-juste : car les 350 livres remises à intérêt à 10 pour cent par an, rendront au bout de l'année 35 livres de bénéfice. En ajoutant ces 35 livres à leur capital 350, on aura au bout de l'année 385 livres de bénéfice; ce qui est précisément ce que demandoit le débiteur.

Remarque. Quand on dit, à 10 pour cent d'intérêt par an, c'est bien la dixième partie de la somme proposée, parce que 10 est la dixième partie de 100. Mais si l'on disoit à 4, ou à 5, ou à 6, &c. pour cent d'intérêt, cela ne signifieroit pas la

* On appelle *capital* dans le commerce, une somme dont est provenu quelque intérêt, ou de laquelle il doit provenir.

quatrième ou la cinquième ou la sixième partie de cent, étant évident que 4 est la vingt cinquième partie de cent, & non la quatrième ; de même 5 est la vingtième partie de cent, & non la cinquième, &c. Pour trouver donc quelle partie d'un capital est un intérêt ou un bénéfice proposé, on divisera ce capital par son intérêt ; & le quotient de la division indiquera cette partie, que nous appellerons dans la suite *quotité :* ainsi, à 5 pour cent, la quotité d'intérêt est un $\frac{1}{20}$, &c.

PROBLÊME X.

Semblable au précédent, mais plus compliqué.

On achète pour 2680 livres de marchandises, à un an de crédit. L'acheteur propose de payer sur le champ toute la somme, si on veut en rabattre un intérêt de 13 $\frac{1}{2}$ pour cent, par an : la proposition acceptée, on demande à combien va l'escompte ?

RÉSOLUTION.

Pour connoître la quotité de cet intérêt, vous diviserez 100 par 13 $\frac{1}{2}$; ou en doublant le tout, pour ôter la fraction, vous diviserez 200 par 27, & vous trouverez pour quotient 7 & $\frac{11}{27}$; c'est-à-dire, que la quotité de l'intérêt est la septième partie + la $\frac{11}{27}$e partie du capital : mais on aura plus commodément cette quotité, en n'achevant point la division, c'est-à-dire, en l'indiquant simplement par $\frac{200}{27}$.

L'intérêt de 2680 livres à 13 $\frac{1}{2}$ pour cent, au bout d'un an, est donc 2680 à diviser par $\frac{200}{27}$, ou (en multipliant le dividende & le diviseur par 27) 72360 à diviser par 200, ou simplement

7236 à diviser par 20; ce qui produira 361 livres $\frac{4}{5}$ = 361 livres 16 sols.

Ce que l'on aimera peut-être mieux déterminer en disant : si 100 éxigent 13 $\frac{1}{2}$ d'intérêt, combien éxigeront 2680 livres? C'est une simple Règle de Trois, où l'on multiplie 13 $\frac{1}{2}$ par 2680, pour avoir 36180 livres à diviser par 100 ; ce qui produit 361 livres & $\frac{4}{5}$ = 361 livres 16 sols, comme ci-dessus.

Nous avons déja fait remarquer qu'on ne devoit pas remettre sur le champ au débiteur ces 361 livres & $\frac{4}{5}$ pour son escompte, puisqu'il n'est supposé les gagner que dans le cours d'une année. On dira donc : la somme x, qu'on doit lui remettre, plus l'intérêt de cette somme à 13 $\frac{1}{2}$ d'intérêt pour cent par an, doivent faire 361 livres & $\frac{4}{5}$. Pour avoir cet intérêt de x, on dira : si 100 produisent 13 $\frac{1}{2}$, ou, en doublant le tout, si 200 exigent 27, combien x produira-t-il? On trouvera $\frac{27x}{200}$ pour l'intérêt de x; & l'équation à résoudre sera $x + \frac{27x}{200}$ ou $\frac{227x}{200}$ = 361 & $\frac{4}{5}$; & multipliant le tout par 200, on aura $227x = 72200 + 160 = 72360$, & $x = \frac{72360}{227}$ liv. = 318 livres 15 sols 3 den. & $\frac{219}{227}$ den. pour l'escompte. On se convaincra que $\frac{72360}{227}$ liv. est le véritable escompte de 2680 liv. à 13 $\frac{1}{2}$ pour cent par an, en faisant voir que $\frac{72360}{227}$ liv. jointes à leur intérêt, donnent précisément, au bout de l'an, 361 livres & $\frac{4}{5}$; & pour avoir cet intérêt, on dira : si 100 donnent 13 $\frac{1}{2}$, ou si 200 donnent 27, combien produiront $\frac{72360}{227}$? En achevant le calcul, suivant la Règle de Trois ordinaire, on trouvera que cet intérêt = 43 liv. 0 s. 8 den. + $\frac{8}{227}$. Ajoutant donc $\frac{72360}{227}$ liv.

ou 318 liv. 15 f. 3 den. + $\frac{219}{227}$ à 43 liv. 0 f. 8 den. + $\frac{8}{227}$, on aura précifément 361 livres 16 fols = 361 livres + $\frac{4}{5}$; puifque 16 fols = $\frac{4}{5}$ de livres, & c'eft tout ce que l'on demandoit.

Mais ceux à qui l'on accorde un efcompte, n'anticipent pas toujours leur paiement d'une année entière; ils ne peuvent fouvent le faire que de quelques mois. C'eft toujours le même principe de réfolution; le calcul n'en eft qu'un peu plus long, ainfi qu'on va le voir dans le Problême fuivant.

PROBLÊME. XI.

On achète pour 7650 livres de marchandifes à un an de crédit. Le vendeur propofe d'en rabattre 7 livres $\frac{2}{3}$ d'intérêt pour cent, par an, quand on voudra en anticiper le paiement. L'acheteur vient au bout de cinq mois pour s'acquitter. Quel efcompte doit-on lui faire?

RÉSOLUTION.

Le débiteur n'anticipe fon paiement que de 7 mois: voici donc comment il faut raifonner. Quand l'anticipation eft de 12 mois ou d'un an, on remet 7 & $\frac{2}{3}$ pour cent par an; que doit-on remettre lorfqu'elle eft de 7 mois? C'eft-là une fimple Règle de Trois, où l'on dit: fi 12 donnent 7 & $\frac{2}{3}$, ou (en multipliant les deux termes par trois, pour éviter la fraction), fi 36 donnent 23, combien 7 donneront ils? En multipliant 23 par 7, & divifant le produit 161 par 36, on trouvera que 4 & $\frac{17}{36}$ font ce que l'on doit remettre pour cent, quand le paiement eft anticipé de 7 mois.

La queftion fe préfente alors fous la forme fui-

vante. Si 100 éxigent 4 & $\frac{17}{36}$; ou plus simplement, si 100 éxigent $\frac{161}{36}$ d'escompte, combien en éxigeront 7650 ? En multipliant $\frac{161}{36}$ par 7650, & divisant par 100 le produit qui en résultera, on aura au quotient 342 livres & $\frac{1}{8}$; mais, comme nous l'avons dit bien des fois, il ne faut pas remettre sur le champ ces 342 livres & $\frac{1}{8}$ au débiteur, puisqu'il n'est supposé les gagner que dans le cours de 7 mois ; on dira donc : la somme x, qu'on doit remettre au débiteur, plus l'intérêt qu'il doit retirer de cette somme dans le cours de 7 mois, à $\frac{161}{36}$ pour cent, doivent égaler 342 livres & $\frac{1}{8}$; & pour avoir cet intérêt de la somme x, on fera cette Règle de Trois : 100 produisent $\frac{161}{36}$, combien produira x ? On trouvera que cet intérêt $= \frac{161x}{3600}$; & l'équation qui résoudra le Problême, sera $x + \frac{161x}{3600} = 342$ livres & $\frac{1}{8}$; ou, en multipliant le tout par 3600, on aura $3761\,x = 1231650$: ainsi $x = \frac{1231650}{3761} = 327$ liv. 9. s. 7 den. $\frac{205}{3761}$ pour l'escompte.

Effectivement, si on prend l'intérêt de cet escompte à $\frac{161}{36}$ d'intérêt pour cent, dans le cours de 7 mois, on aura 14 livres 12 sols 10 deniers & $\frac{3556}{3761}$, lesquelles ajoutées à 327 livres 9 sols 7 deniers $\frac{205}{3761}$, font exactement les 342 livres 2 sols 6 deniers, que le débiteur se proposoit de gagner au bout de 7 mois.

PROBLÊME XII.

QUI EST L'INVERSE DES PRÉCÉDENS.

On achète pour 2680 livres de marchandises à un an de crédit ; & parce que l'on paie sur le

champ, on obtient une remise de 318 livres 15 sols 3 deniers $+ \frac{219}{227}$ den. ou, ce qui est le même, de $\frac{72360}{227}$ liv. On voudroit sçavoir à combien va l'escompte pour 100 par an.

RÉSOLUTION.

Soit appellé x cet escompte. En ce cas, si 100 donne x, combien 2680 produiront-ils ? L'on trouvera $\frac{2680x}{100}$ pour l'escompte de 2680 livres par an : or ce dernier escompte doit être plus fort que $\frac{72360}{227}$ liv. accordé sur le champ, puisque ces $\frac{72360}{227}$ liv. jointes à leur intérêt, dans le cours d'une année, ne doivent faire que $\frac{2680x}{100}$, qui est, comme on vient de le voir, l'escompte de 2680 livres pour une année. Or pour trouver l'intérêt de $\frac{72360}{227}$ liv. par an, on dira : puisque 100 produisent x d'intérêt par an, combien produiront, dans le même tems, $\frac{72360}{227}$? On aura $\frac{72360x}{22700}$ pour l'expression de cet intérêt; alors on fera cette équation : l'escompte actuel $\frac{72360}{227}$, plus $\frac{72360x}{22700}$, qui est l'intérêt de cet escompte dans le cours d'une année, doivent égaler $\frac{2680x}{100}$, que nous avons trouvé pour l'escompte total des 2680 liv. par an; c'est donc à dire que $\frac{72360}{227} + \frac{72360x}{22700} = \frac{2680x}{100}$. Ainsi $\frac{72360}{227} = \frac{2680x}{100} - \frac{72360x}{22700}$; & (en multipliant par 100.) $\frac{7236000}{227} = 2680x - \frac{72360x}{227}$. Multipliant encore le tout par 227, on aura $7236000 = 608360x - 72360x$, ou $7236000 = 536000x$; & par conséquent

$x =$

$x = \frac{7236000}{536000} = \frac{7236}{536} =$ (en achevant la diviſion) $13\frac{1}{2}$. Ce qui ſignifie que l'eſcompte accordé va à $13\frac{1}{2}$ pour cent par an. C'eſt effectivement ce que l'on ſçavoit déja par le Problême X, & ce que l'on pourroit vérifier, en recherchant, comme on y a fait, combien on doit remettre actuellement pour 2680, en ſuppoſant que l'on veuille accorder $13\frac{1}{2}$ d'eſcompte pour cent par an.

Quand le génie a trouvé des principes de Réſolution, on tâche de ſoumettre à une loi la plus ſimple qu'il eſt poſſible * tous les cas à l'infini, où les queſtions de la même eſpéce peuvent avoir lieu. La ſociété en retire cet avantage, que les hommes les moins pénétrans lui deviennent utiles. Un méchaniſme ſimple eſt à la portée de preſque tous lès hommes : ceux qui penſent, découvrent les règles, & les règles conduiſent ceux qui ne penſent point, ou qui n'ont point le tems de penſer, ainſi que je vais le faire voir en prenant d'une manière générale une queſtion d'eſcompte.

* Les Règles les plus ſimples ſont preſque toujours dûes à une Théorie très-difficile. Pour que la ſociété entre en poſſeſſion d'une découverte, même très-utile, il ne ſuffit pas que ce ſoit un découverte ; il faut que l'uſage en ſoit commode, & l'application à l'uſage, très facile. Les Praticiens ſubſiſtent preſque tous de leur travail ; il eſt donc néceſſaire que leur pratique ſoit très-expéditive. Ainſi les hommes de génie qui découvrent de nouvelles routes pour la commodité publique, ne doivent rien négliger pour les rendre aiſées : les moyens d'y parvenir ne ſçauroient manquer d'être auſſi multipliés que les obſtacles qui en éloignent. Cela exige des reſſources de génie extraordinaires, & telles que la plûpart des hommes ſe bornent à en jouir, incapables de comprendre comment ils en jouiſſent. Cette multitude d'idées & de conſéquences, qui en montrent les rapports, eſt préciſément ce qui conſtitue la difficulté de la Théorie.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE TOUTES LES QUESTIONS D'ESCOMPTE.

Soit le prix de la marchandiſe vendue $= m$, l'eſcompte à tant pour 100 par an $= e$; pour avoir l'eſcompte de m par an, on dira : ſi 100 donne e, combien produira m? On trouvera que l'eſcompte de m par an $= \frac{em}{100}$, & l'eſcompte inconnu $= x$. L'intérêt de x ſe déterminera en diſant : ſi 100 produit e, combien produira x? On aura $\frac{ex}{100}$ pour l'intérêt de x.

Tout cela ſuppoſé, voici comment il faut s'y prendre pour découvrir la Règle qui faſſe connoître x dans tous les cas. On dira l'eſcompte actuel inconnu x, plus l'intérêt $\frac{ex}{100}$ de cet eſcompte, doivent égaler l'eſcompte de m par an, & ce dernier eſcompte $= \frac{em}{100}$; c'eſt-à-dire, que $x + \frac{ex}{100} = \frac{em}{100}$. En multipliant par 100, on aura $100\,x + ex = em$; ou, en décompoſant cette équation, $\overline{100 + e} \times x = e \times m$; d'où l'on tire cette proportion * $100 + e . e :: m . x$,

* Tout ceci étant une addition nouvelle dans cet Ouvrage, eût été beaucoup mieux placé à l'article des Proportions, du Tome II : mais ce ſecond Volume, déja plus conſidérable que le premier, l'auroit été trop. Que l'on ne me faſſe donc pas un reproche de manquer de méthode en cet endroit; j'y vais ſuppléer par une bonne explication, que l'on doit lire très-attentivement.

On appelle *Rapport géométrique*, la comparaiſon de deux

ce qui signifie, que dans tous les cas possibles, si l'on fait une Règle de Trois (dont le premier terme soit 100, plus l'escompte *e* à tant pour cent par an, le second terme soit ce même escompte *e*, & le troisième soit la valeur *m* de la marchandise), on aura au quatrième la valeur *x* de l'escompte.

quantités, en tant que l'une contient l'autre ou y est contenue : ainsi comparant 6 à 2, vous trouverez que le Rapport géométrique du premier au deuxième est 3 ; parce que 6 divisé par 2 = 3. On appelle Proportion géométrique, l'égalité de deux Rapports géométriques ; ainsi le Rapport géométrique de 12 à 4 étant égal à celui de 6 à 2, ces quatre nombres forment une proportion, qui s'énonce ainsi : 12 est à 4 comme 6 est à 2, & qui s'écrit 12 . 4 :: 6 . 2, où vous voyez qu'un point entre deux termes signifie *Est à*, & les quatre points en quarré signifient *Comme*. On appelle *Extrêmes* les deux quantités qui terminent la proportion, telle que 12 & 2 ; & l'on nomme *Moyens* ceux du milieu, comme 4 & 6.

On a vu (n°. 24. Arith.) que dans une Règle de Trois ou de Proportion, si l'on avoit trois quantités 12, 18, 30, auxquelles on cherchât un quatrième terme proportionnel, il falloit multiplier les deux derniers termes 18 & 30, l'un par l'autre, & en diviser le produit 540 par le premier terme 12, pour avoir le quatrième proportionnel 45, de manière que

$12 . 18 :: 30 . 45$, ou que $\frac{18 \times 30}{12} = 45$; donc, en multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par 12 pour faire évanouir la fraction, on a $18 \times 30 = 12 \times 45$; ce qui signifie que dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes 12 & 45 est égal au produit des moyens 18 & 30 ; ce qu'il est très-essentiel de bien remarquer.

Il ne l'est pas moins d'observer, que le produit de deux quantités, comme 2×12, étant égal à celui de deux autres quantités, telles que 6×4 ; c'est-à-dire, qu'ayant $2 \times 12 = 6 \times 4$, on peut en déduire une Proportion géométrique, en faisant 2 . 6 :: 4 . 12, ou 4 . 2 :: 12 . 6 ; ce qui signifie que toute équation peut être transformée en proportion géométrique, n'importe quel arrange-

En reprenant, par exemple, le Problême IX. on aura $m = 3850$ livres, $e = 10$; & par conséquent il faut dire : $100 + 10$ ou $110 . 10 :: 3850 . x = \frac{38500}{110} = 350$ pour l'escompte actuel, comme on l'a trouvé en cet endroit, mais d'une manière plus laborieuse, parce qu'alors nous apprenions à en faire la découverte.

Pareillement, si l'on veut résoudre de cette manière le Problême X. on aura $m = 2680$, $e = 13\frac{1}{2}$: ainsi $100 + 13\frac{1}{2}$ ou $113\frac{1}{2} . 13\frac{1}{2} :: 2680 . x$; ou, en doublant les deux premiers termes, $227 . 27 :: 2680 . x$; par conséquent $x = \frac{2680 \times 27}{227} = \frac{72360 \text{ liv.}}{227} = 318$ livres 15 sols 3 deniers $+ \frac{219}{227}$, comme on l'a trouvé, en cherchant l'art de résoudre ce Problême.

Enfin, pour le Problême XI. $m = 7650$, $e = \frac{161}{36}$; donc $100 + \frac{161}{36} . \frac{161}{36} :: 7650 . x$, ou (en multipliant les deux premiers termes par 36) $3761 . 161 :: 7650 . x = \frac{7650 \times 161}{3761} = \frac{1231650}{3761} = 327$ livres 9 sols 7 deniers $+ \frac{205}{3761}$, comme on l'a vû au même endroit.

ment l'on donne à ses termes, pourvû que les deux termes d'un même membre de l'équation soient moyens, tandis que les deux autres du second membre sont extrêmes; & réciproquement toute proportion géométrique peut être transformée en une équation.

Ces deux principes sont si féconds, qu'on ne sçauroit trop acquérir la facilité d'en faire usage. Ceux qui voudront avoir recours au chapitre des Proportions, qui est dans le second Tome, feront très-bien: la Théorie en est extrêmement facile. L'anticipation de cette étude leur coûtera fort peu; & sans cette précaution, toutes ces Règles-ci pourroient un peu les fatiguer.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE

Du Problême inverse de l'Escompte; c'est-à-dire, du cas où l'escompte actuel est connu, & dans lequel on demande combien est-ce pour 100 par an?

Soit, comme ci-dessus, le prix de la marchandise $= m$, l'escompte actuel $= e$, l'escompte à tant pour 100 par an $= x$, on aura l'escompte de m pour un an, en disant : $100 . x :: m . \frac{mx}{100}$. L'escompte de m est donc $= \frac{mx}{100}$; & si l'on fait $100 . x :: e . \frac{ex}{100}$, on aura $\frac{ex}{100} =$ l'intérêt de e.

Mais l'escompte actuel e, plus l'intérêt de cet escompte à x pour 100 de bénéfice par an, doivent égaler l'escompte de m pour une année, & ce dernier escompte $= \frac{mx}{100}$; on aura donc cette équation $e + \frac{ex}{100} = \frac{mx}{100}$; donc (en multipliant par 100) on a $100 e + e x = m x$; ainsi $100 e = m x - e x$, ou $\overline{100} \times e = \overline{m - e} \times x$: d'où l'on tire cette proportion, $m - e . e :: 100 . x$: ainsi, quand on fait une remise actuelle e sur la valeur d'une marchandise m, en faveur d'un paiement anticipé d'une année, dont on étoit convenu de faire crédit, on détermine combien c'est pour 100, en faisant cette proportion : la valeur m de la marchandise, moins l'escompte ou la remise actuelle e, est à cet escompte e, comme 100 est à un quatrième terme x, qui fera connoître la quotité pour 100.

S'agit-il, par exemple, de résoudre le Problême X. dans lequel la valeur de la marchandise $m = 2680$ livres, la remise ou l'escompte actuel $e = 318$ livres 15 sols 3 deniers $+ \frac{219}{227} = \frac{72360}{227}$ liv. la quotité ou l'escompte pour 100 par an $= x$? On fera cette proportion, $2680 - \frac{72360}{227} \cdot \frac{72360}{227} :: 100 \cdot x$; ou (en multipliant les deux premiers termes par 227) $608360 - 72360 \cdot 72360 :: 100 \cdot x$; ou enfin $536000 \cdot 72360 :: 100 \cdot x = \frac{7236000}{536000} = \frac{7236}{536} =$ (en achevant la division) $13 + \frac{268}{536} = 13\frac{1}{2}$, comme on l'a vû au même endroit.

L'embarras de porter de l'argent d'un lieu dans un autre trop éloigné, les risques même du transport, la différence des monnoies selon les différentes Nations chez lesquelles on peut voyager, ou avec qui l'on peut avoir quelques rapports de commerce, ont fait naître les *Lettres de Change* & les correspondances. Une Lettre de change est un écrit, en vertu duquel la personne pour laquelle il est fait, va recevoir la somme qui y est exprimée, chez le Correspondant à qui la Lettre est adressée. Il arrive souvent que ceux qui donnent des Lettres de Change, ne doivent rien aux personnes qui les reçoivent : il faut donc que ces dernières en paient sur les lieux l'équivalent aux premiers, de quelque manière que ce soit ; & comme cette espèce de trafic, très-commode & très-multiplié, est devenu un métier, ceux qui en font profession, appellés *Banquiers*, en retirent une rétribution, un gain ou un lucre, à tant pour cent, selon les usages reçus dans les différentes Villes, ou les différentes Nations, ou suivant que les particuliers en conviennent avec les Banquiers mêmes. Outre

l'équivalent compté au Banquier, on doit donc lui remettre aussi la rétribution convenue; & cette rétribution doit être proportionnée à la somme que doit recevoir la personne en faveur de qui on fait la Lettre de Change; ce qui comprend deux cas différens, qui vont être expliqués par un seul problême.

PROBLÊME XIII.

Un particulier ayant besoin de faire un voyage de Marseille à Paris, n'y veut point porter d'argent. Il dépose 1500 livres chez un Banquier, qui lui fournit une Lettre de Change de la même somme, adressée à un Correspondant de Paris; à condition que le porteur de la Lettre payera 3 pour 100 de l'argent qu'il y recevra n'en ayant point payé l'intérêt à Marseille. On demande à quoi se réduira la somme qu'il doit recevoir.

RÉSOLUTION.

S'il avoit voulu recevoir précisément 1500 livres à Paris, il auroit fallu qu'il eût déposé à Marseille 1545 livres, c'est à-dire 1500 livres, & 45 livres pour l intérêt du change; car si 100 produisent 3, il est certain que 1500 produiront 15 fois 3, ou 45 livres. Cette question se résoudroit donc par une simple Règle de Trois ordinaire.

Mais comme les 1500 livres doivent porter l'intérêt du change; c'est-à-dire, comme les 1500 livres sont composées d'un capital & d'un intérêt à 3 pour 100, il est évident que le porteur de la Lettre ne recevra pas 1500 livres à Paris. Il en faudra rabattre l'intérêt du change; & cet intérêt n'est plus 45 livres. Car l'intérêt à 3 pour 100, ne

s'entend qu'à 3 pour 100 de la somme que l'on doit recevoir : or on a vû que l'on ne recevroit pas 1500 livres.

On dira donc : la somme x que l'on doit recevoir, plus l'intérêt de cette somme à 3 pour 100, doivent composer exactement 1500 livres ; & pour avoir l'intérêt de x, on dira : puisque 100 donnent 3, combien x ? On trouvera cet intérêt $= \frac{3x}{100}$; & l'on aura cette équation $x + \frac{3x}{100} = 1500$; & en multipliant par 100, elle deviendra $100x + 3x = 150000$, ou $103x = 150000$: & enfin $x = \frac{150000}{103} = 1456$ liv. 6 f. 2 den. $+ \frac{58}{103}$. Ce qui signifie que le porteur de la Lettre de Change, en faveur de qui elle est faite, ne recevra à Paris que 1456 liv. 6 f. 2 den. $+ \frac{58}{103}$, quoiqu'il ait déposé 1500 livres au Banquier de Marseille, ou qu'on les ait déposées pour lui. Le surplus est la rétribution du Banquier, laquelle $=$ 43 livres 13 sols 9 deniers $+ \frac{45}{103}$.

On voit que cette opération n'est point différente de la Règle d'escompte ; & qu'ainsi on pouvoit la faire tout d'un coup, suivant la Règle proposée & démontrée (pages 274 & 275.), en disant : $103 . 3 :: 1500 . \frac{3 \times 1500}{103} = \frac{4500}{103} = 43$ liv. 13 f. 9 den. $+ \frac{45}{103}$, ainsi qu'on l'a trouvé pour la rétribution du Banquier (*a*).

(*a*) J'aurois pu me dispenser absolument d'entrer dans les détails & dans toutes les circonstances que comporte une Lettre de Change, dont il faut payer l'intérêt ; je n'avois qu'à renvoyer séchement à la Règle d'Escompte.
Les esprits d'un grand vol m'accuseront d'une diffusion insupportable ; ils diront que c'est ramper, que de se traîner ainsi de vérités en vérités ; que l'on ne descend point un fossé que l'on peut franchir d'un saut. Ils ont raison ; ceci n'est point fait pour eux. Je crois l'avoir

On se détermine fort souvent dans le commerce à faire des mêlanges de denrées à différens prix; soit parce qu'on auroit de la peine à s'en défaire séparément, soit parce que les frais de débit en seroient autrement trop considérables, soit même, parce qu'en les mêlant, elles peuvent acquérir un titre de bonté dont on a besoin. Cette espèce de mêlange s'appelle *Alliage*, il doit donc y avoir des Règles *d'Alliage*. Elles consistent à montrer la conduite que l'on doit tenir dans tous les cas, pour déterminer la valeur d'une mesure composée de plusieurs parties à différens prix, ou pour sçavoir ce qu'il faut prendre de chaque espèce de denrées dont on se propose de faire un mêlange, afin qu'il en résulte un tout à certain prix, ou à un certain titre de bonté.

PROBLÊME XIV.

Un Fermier a 19 boisseaux de bled à 27 sols le boisseau; 13 d'orge, dont le boisseau est estimé 23 sols; & 17 de seigle, à 18 sols le boisseau. Il mêle toutes ces trois denrées. Combien doit-il vendre chaque boisseau de ce mêlange, pour en retirer le même argent qu'il auroit eu en les vendant séparément?

déja dit; une Règle est le génie réduit en machine. A la vûe de son effet, les personnes douées d'une pénétration subtile en saisissent l'esprit : c'est un mystère pour les autres, & quelquefois une humiliation désespérante. J'écris pour ces derniers; les riches n'ont pas besoin de présens.

On ne sçauroit nier qu'à force de voir des ressorts, des leviers, des roues, des fusées, des pignons; à force de les manier, de les limer, de les polir, de les combiner, de les monter, de les démonter, &c. on ne sçauroit nier, dis-je, qu'on ne parvienne enfin à faire une montre. En voyant aussi les différentes formes sous lesquelles se reproduit un même génie, en remarquant comment il vient s'appliquer à différens cas, il laisse en quelque sorte une portion de lui-même dans les têtes qui l'observent. Je travaille à former l'esprit d'invention, & cela ne se peut que par des points de vûe multipliés, analysés, discutés.

RÉSOLUTION.

Commencez par faire une somme de la valeur totale de chaque denrée. Les 19 boisseaux de bled produiront 25 livres 13 sols; les 13 d'orge feront 14 livres 19 sols; & les 17 de seigle donneront 15 livres 6 sols. Ces différentes valeurs réunies = 55 livres 18 sols. Trouvez ensuite la somme de tous les boisseaux, qui est 49. Or ces 49 boisseaux valant, réunis, 55 livres 18 sols, ce sera pour chaque boisseau la quarante neuvième partie de 55 livres 18 sols. Cela se réduit donc à une simple division de 55 livres 18 sols par 49; & l'on trouvera que le prix d'un boisseau de ce mêlange = 1 livre 2 sols 9 deniers, $+ \frac{39}{49}$ den. c'est donc à dire, que les problêmes de cette espèce d'alliage se résoudront, en divisant la somme des prix par celle des mesures, ce qui est d'une exécution très-aisée : elle le seroit encore plus, s'il y avoit un égal nombre de mesures pour chaque denrée, ainsi qu'on va le voir.

PROBLÊME XV.

Un Marchand a quatre muids de vin, de 288 pintes chacun; le premier = 3 sols la pinte, le second = 5 sols, le troisième = 8 sols, & le quatrième = 11 sols; combien doit il vendre chaque pinte, après en avoir fait le mêlange ?

RÉSOLUTION.

Comme il y a un même nombre de mesures de chaque espèce de vin, une pinte du mêlange contiendra des parties égales de chaque vin; ainsi dans quatre pintes de ce mêlange, il y aura une pinte à

3 sols, une à 5, une à 8, & une à 11 sols; ce qui sera 3 + 5 + 8 + 11 = 27 sols pour la valeur de 4 pintes réunies; donc en divisant 27 sols par 4, on aura 6 sols 9 deniers, qui seront le prix d'une pinte de ce mêlange : ce qui est très-évident, puisque l'on aura toujours 27 sols, soit que l'on vende séparément les 4 pintes aux différens prix marqués pour chacune, soit qu'on les vende confondues au même prix. Ainsi, quand le nombre des pintes que l'on mêle, est égal pour chaque espèce, il n'y a qu'à prendre de chaque espèce la valeur d'une seule pinte; on aura alors autant de valeurs de pintes qu'il y a de sortes de vins : qu'on en fasse la somme, & qu'on la divise par le nombre qui indique combien il y a de sortes de vins, le quotient exprimera la valeur de chaque pinte du mêlange.

Remarquez que le problême précédent ne pourroit pas se résoudre de cette manière, parce qu'il n'y a pas un nombre égal de boisseaux pour chaque espèce de grain; ainsi un boisseau du mêlange ne contient pas des parties égales de chaque espèce; il y a une plus grande portion de bled que de seigle, il y a plus de mesures de seigle que d'orge; par conséquent dans trois boisseaux du mêlange, on verra qu'il y a plus d'un boisseau de bled, plus d'un boisseau de seigle, mais il n'y a pas un boisseau d'orge; & comme on ignore les parties excédentes & la partie défaillante, on ne pourroit pas (à moins qu'on ne les découvrît par un long circuit) faire la somme des valeurs de chaque portion de bled, d'orge & de seigle, contenue dans trois boisseaux du mêlange, comme on vient de le pratiquer.

La Règle d'alliage est d'un usage fort commun chez les Orfèvres, qui mettent en œuvre l'or & l'argent. Il leur est utile de sçavoir lorsqu'ils font

un mélange de plusieurs masses d'or ou d'argent, quel degré de bonté acquiert ce mélange, dont les parties séparées avoient différens titres *.

PROBLÊME XVI.

On a trois lingots d'or **, dont le premier = 4 marcs 4 onces, à 23 karats & $\frac{10}{16}$ de fin. † Le second = 2 marcs 6 onces 4 gros, à 21 karats; & le troisième = 5 marcs 3 onces 4 gros, à 20 karats. On les fond ensemble; & l'on voudroit sçavoir à quel titre viendra le marc de cet alliage.

* *Titre*, quand on parle de la monnoie, ou des métaux destinés à en servir, signifie les degrés de bonté ou de pureté qui caractérisent ces métaux. A quel titre est cet or ou cet argent? C'est comme si l'on disoit, combien y a-t-il d'or ou d'argent pur dans cette masse que vous montrez; indépendamment des parties d'or & d'argent, dont elle paroît uniquement composée, combien y a-t-il d'alliage, c'est-à-dire, de matière étrangère? parce qu'il est très-rare qu'une masse d'or un peu considérable, ne contienne précisément que de l'or, quelque soin que l'on ait pris de l'épurer. Qu'on la réduise en grains, en poudre; qu'on la dissolve; qu'on la décompose comme on voudra, il est d'expérience qu'on y trouve toujours quelque portion de matière étrangère.

** *Lingot.* C'est une masse d'or, d'argent, ou de tout autre métal, approchant, par sa forme, d'une langue allongée, d'où elle paroît avoir tiré son nom.

† *Karat.* Je suis volontiers l'opinion de ceux qui pensent que c'est une abbréviation du mot *caractère*. Concevez qu'une masse d'or quelconque soit divisée en 24 parties, si toutes ces parties étoient d'or pur ou d'or fin, on diroit que c'est de l'or *à 24 karats*; mais quand il n'y a dans cette masse que 23 parties d'or pur, & une partie de matière étrangère, on dit alors que cet or est *à 23 karats*; comptant pour rien toute autre matière qui lui sert d'alliage; n'y a-t il que 22 ou 21, ou tout autre nombre de parties d'or pur au-dessous de 24; c'est de l'or à 22 ou à 21 karats, ou à, &c. quoiqu'il y ait ou 2 ou 3 vingt-quatrièmes parties de matière étrangère, ou tout autre nombre de parties, qui en composent l'alliage.

Le karat est donc ici ce qui détermine le titre ou les degrés de bonté d'une masse d'or ou d'argent; c'est proprement ce qui la *caractérise* & la rend appréciable, suivant les usages ou les conventions établies. Les gens sensés se conduisent ainsi, quand ils veulent apprécier quelque Personnage; ils ne mettent en ligne de compte, ni la naissance, ni les dignités, ni la fortune; c'est à la vérité un assez bon alliage; mais de la naissance, n'est pas de la justice; des dignités, ne sont pas du mérite; de la fortune, n'est pas de la sagesse.

RÉSOLUTION.

Puisqu'un marc du premier lingot contient 23 karats & $\frac{10}{16}$ d'or pur, on verra (en réduisant le tout en seizièmes de karat) que les 4 marcs 4 onces, dont il est composé, contiennent 1701 seizièmes d'or pur; qu'il y en a 945 dans les deux marcs 6 onces 4 gros du second lingot, à 21 karats d'or pur pour chaque marc, & que les 5 marcs 3 onces 4 gros du troisième lingot, dont l'or est à 20 karats, contiennent 1740 seizièmes d'or fin; par conséquent, ces trois lingots réunis pesant 12 marcs & $\frac{3}{4}$, contiendront 4386 seizièmes d'or pur, comme on s'en convaincra en faisant l'addition de tous les seizièmes de karat que l'on a trouvés dans chacun des lingots. On dira donc : si 12 marcs & $\frac{3}{4}$ contiennent 4386 seizièmes d'or pur, combien 1 marc en contiendra-t-il? En divisant, suivant la Règle de Trois ou de Proportion, 4386 seizièmes par 12 & $\frac{3}{4}$, ou par $\frac{51}{4}$, on trouvera que le marc de cet alliage contiendra 344 seizièmes d'or pur; & divisant enfin 344 par 16, on aura 21 $\frac{1}{2}$ karats d'or pur dans un marc de ce mêlange. La résolution est donc très simple : on fait la somme de tous les karats contenus dans le nombre des lingots proposés; on divise cette somme par le nombre des marcs que valent les lingots réunis, & l'on a dans le quotient le nombre des karats que l'on cherche pour chaque marc de l'alliage proposé, ainsi qu'il est, ce me semble, très-évident.

On verra dans la note (*b*) pourquoi nous avons

(*b*) Les Problèmes d'Alliage précédens ont été résolus par une division ou par une Règle de Trois simple. Je ne les ai proposés, & montré à les résoudre, que pour que l'on n'ignorât

donné les trois queſtions précédentes ſur l'*Alliage*, quoique l'on n'y faſſe aucun uſage de l'Algèbre. En voici quelques-unes où elle eſt fort utile.

PROBLÊME XVII.

Un Marchand a deux ſortes de vins, l'un à 19 ſols la pinte, & l'autre à 13 ſols. On lui en demande une pinte à 15 ſols dont il n'a point. Il voudroit, des deux vins qu'il a, en compoſer un du prix demandé, ſans ſe faire tort à lui-même ni à l'acheteur. Combien doit-il prendre de chacun des vins qu'il a, pour en faire un au prix qu'il n'a pas ?

RÉSOLUTION.

Soit appéllée la pinte p, la partie que l'on doit prendre du vin à 19 ſols $= x$, celle du vin à 13 ſols $= y$. Suivant l'état de la queſtion, ces deux parties réunies doivent compoſer une pinte : on a donc cette première équation $x + y = p$. De plus cette pinte ainſi compoſée ne doit valoir que 15 ſ. ainſi il faut rechercher la valeur de x & celle de y, relativement à la valeur de la pinte dont elles ſont parties. Pour avoir le prix de x, vous direz : puiſque la pinte p, dont x eſt partie,

aucun des cas qui concernent cette matière. L'Axiôme, *Qui ſçait le plus, ſçait le moins*, eſt faux à bien des égards. On ſçait réſoudre des queſtions fort compliquées, & les plus ſimples échappent ſouvent à notre pénétration.

C'eſt l'habitude à penſer à un objet ſous une certaine forme, qui en rend la conſidération aiſée. S'il vient à ſe préſenter ſous une apparence inuſitée, il faut du tems pour le reconnoître ; & quelquefois avec le tems on ne le reconnoît pas. La plûpart des jugemens des hommes ne ſont pas des jugemens ; ce ſont des réminiſcences de ce qui a été jugé. On eſt ſurpris qu'un homme donne ſur le champ le dénouement d'une queſtion embarraſſante, même pour des eſprits ſupérieurs au ſien ; mais, au fond, il arrive ſouvent qu'il ne l'a pas réſolue. Il s'eſt rappellé qu'elle l'étoit ; & en l'expoſant avec un peu d'art, on fait honneur à ſon intelligence des ſervices de ſa mémoire.

vaut 19 ſ. combien doit valoir x? Cela donne cette proportion $p . 19 :: x . \frac{19x}{p}$, ce qui fait connoître que l'expreſſion du prix de x eſt $= \frac{19x}{p}$. Vous raiſonnerez préciſément de même pour déterminer le prix de y, en diſant : ſi la pinte p, dont y eſt partie, vaut 13 ſ. combien vaut y? Faites-donc cette Règle de Trois : $p . 13 :: y . \frac{13y}{p}$, qui vous fera connoître que le prix de y eſt $= \frac{13y}{p}$; mais les prix réünis de x & de y, ne doivent faire que 15 ſ. voilà donc une ſeconde équation, $\frac{19x}{p} + \frac{13y}{p} = 15$; ou (en multipliant par p) $19x + 13y = 15p$, dans laquelle il y a deux inconnues. Pour en chaſſer une, on reviendra à la première équation $x + y = p$, qui donnera (en tranſpoſant) $x = p - y$; ainſi dans l'équation $19x + 13y = 15p$, en la place de x, on pourra ſubſtituer $p - y$; & elle deviendra $19p - 19y + 13y = 15p$; donc (en tranſpoſant) $19p - 15p = 19y - 13y$; ou, en réduiſant, $4p = 6y$, d'où l'on tire (en diviſant par 6) $\frac{4p}{6} = y = \frac{2p}{3}$; & comme $p = 1$ pinte, il s'enſuit que $y =$ les $\frac{2}{3}$ d'une pinte; & par conſéquent $x = \frac{1}{3}$ de pinte : c'eſt-à-dire, que pour faire la pinte que l'on demande, il faut prendre les $\frac{2}{3}$ de la pinte du vin à 13 ſ., & $\frac{1}{3}$ de la pinte du vin à 19; & l'on aura exactement une pinte de vin à 15 ſ. Ce qu'il eſt très-aiſé de prouver; car le tiers d'une pinte à 13 ſ. vaudra 4 ſ. $\frac{1}{3}$, & les deux tiers vaudront 8 ſ. & $\frac{2}{3}$. Il faut prendre à préſent le tiers de la pinte à 19 ſ. qui eſt 6 ſ. & $\frac{1}{3}$; or ces deux portions 8 & $\frac{2}{3}$ + 6 & $\frac{1}{3}$, réünies en une pinte, font

précisément la valeur de 15 ſ. Le problême eſt donc entièrement réſolu.

Mais il ne l'eſt que pour un cas particulier. Donnons une ſolution générale, qui renferme tous les cas imaginables, & tâchons d'en tirer une règle ſimple pour les Arithméticiens pratiques; car il importe fort à la ſociété d'avoir des machines qui expédient les opérations, quoiqu'elles ignorent les reſſorts qui les font mouvoir.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE D'UN PROBLÊME D'ALLIAGE A DEUX INCONNUES.

Soit une pinte $= p$; le prix d'une ſorte de vin, dont elle eſt la meſure, $= a$; le prix d'une autre ſorte de vin, meſuré comme le premier, $= b$; & comme l'un des deux prix doit être plus fort que l'autre, on ſuppoſera $a > b$. On demande la portion x que l'on doit prendre du premier vin, & la portion y du ſecond, pour en compoſer un nombre n de pintes au prix de m la pinte *.

Puiſque les deux portions x & y réunies doivent compoſer autant de pintes p qu'il y a d'unités ou de parties d'unité dans n, on a cette équation $x + y = np$. Pour avoir les prix de x & de y, on dira comme ci-deſſus : ſi une pinte p vaut a,

* Si l'on s'aviſoit de propoſer en ces termes une queſtion à des gens qui ne ſeroient pas dans l'habitude de paſſer des idées particulières à celles que l'on nomme générales, il eſt certain qu'une pareille propoſition ne ſeroit attribuée qu'à une aliénation d'eſprit, & l'on auroit raiſon. Notre ame n'apperçoit que des idées particulières; tout être eſt déterminé par ſa nature. Un être en général n'exiſte point : qui pourroit en avoir la perception? Il ne peut faire ni ſenſation, ni image, ni tableau; & c'eſt peut-être ce que l'on peut dire de mieux contre ceux qui ſoutiennent que les idées

combien

combien vaut sa portion x? Elle sera $= \frac{ax}{p}$. Pareillement, si une pinte p vaut b, combien vaut sa portion y? On trouve qu'elle est $= \frac{by}{p}$; or ces deux portions $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p}$ réunies doivent valoir autant de fois le prix demandé m, qu'il y a d'unités dans le nombre n des pintes que l'on veut avoir : ce qui donne cette autre équation $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = mn$, ou $ax + by = mnp$.

Pour faire évanouir une des inconnues de cette dernière équation, on aura recours à la première $x + y = np$, laquelle donnera, par transposition, $x = np - y$. Substituant donc cette valeur de x dans l'équation $ax + by = mnp$, elle deviendra $anp - ay + by = mnp$; &, en

générales précèdent dans notre esprit les idées particulières; que l'on a, par exemple, l'idée de l'infini avant celle des Etres finis, &c.

Il n'y a que trois sortes d'esprits à qui l'on puisse avoir ici affaire : les uns soutiennent fortement que nous avons si bien des idées générales, comme celle de l'infini, que nous les apportons en venant au monde; un fort grand nombre d'autres ne s'en doutent pas; enfin bien des gens le nient tout net.

Si ces idées sont en nous, à notre insçu, si elles y restent toute la vie, cela revient à une pure privation : mais c'est bien pis, lorsqu'en les recherchant de bonne foi, on ne les trouve pas. Une idée gravée en nous seroit un fait; il n'y a personne qui ne fût en état de l'attester; le pour ou le contre n'apporte ici ni gain ni perte : il ne faut donc pas prouver aux hommes qu'ils ont des idées générales, qu'ils ont l'idée de l'infini; il faut leur demander s'ils l'ont. Tous ceux que j'ai consultés, sans être prévenus des opinions agitées par les Philosophes, m'ont répondu qu'ils n'en sçavoient rien. On peut compter sur la même réponse de la part de ceux qui n'ont point médité sur les effets de la nature ni sur les propriétés de l'ame. Voilà déja une très grande portion des hommes qui ignoreroient un fait, gravé néanmoins dans leur esprit, suivant les défenseurs ou les partisans des idées innées. Quand à ceux qui font profession de discuter ces matières, parmi les Philosophes du plus grand nom, les uns l'affirment, les autres le nient. D'où pourroit procéder cette diversité d'opinions sur un fait, dont notre esprit devroit avoir l'empreinte? Il y a plus de vingt-cinq ans que je m'interroge moi-même là-dessus, & que je ne reçois point de réponse.

Toute cette grande controverse ne se réduiroit elle pas à un malentendu? Ne confondroit-on pas un jugement ou une induction avec

transfposant, $ay - by = anp - mnp$; & divisant cette dernière équation par $a - b$, elle devient $y = \frac{anp - mnp}{a-b}$, ou (comme $p = 1$) $y = \frac{an - mn}{a-b}$: voilà donc la portion y trouvée égale à des quantités toutes connues. Mais on vient de voir que $x = np - y$, ou (à cause de $p = 1$) $x = n - y$; ainsi, en substituant dans cette dernière équation la valeur de y trouvée ci-dessus, on aura $x = n - \frac{an + mn}{a-b} =$ (en donnant la même dénomination) $\frac{an - bn - a + mn}{a-b} = \frac{mn - bn}{a-b}$. Ainsi tout est trouvé, & l'équation $y = \frac{an - mn}{a-b}$ se décompose en celle-ci $y = \frac{\overline{a-m} \times n}{a-b}$ ou $y \times \overline{a - b} = \overline{a - m} \times n$; ce qui donne cette proportion $a - b . a - m :: n . y$. De même l'équation $x = \frac{mn - bn}{a-b} = \frac{\overline{m-b} \times n}{a-b}$; ou x

une idée? En ce cas les parties antagonistes se concilieroient; rien n'étant si ordinaire que de conclure l'existence de certains êtres sans en avoir l'idée. Aucun de ceux qui ont observé les effets de l'Aimant, n'a osé nier l'existence d'une matière magnétique : celle de l'Electricité est palpable & presque visible; néanmoins la nature de tous ces agens est pour nous dans une profonde nuit.

Mais s'il n'y a point d'idées générales, il semble que l'Algèbre n'est plus. On ne s'y occupe & on n'y entend parler que d'expressions générales, que de symboles qui représentent tous les cas infinis d'une question. Je crois que l'on confond encore ici les opérations de l'esprit. On appelle x le prix d'une marchandise; ce n'est pas assurément parce que x nous représente le tableau de tous les prix imaginables, étant absurde de donner le même nom à des valeurs différentes : voici donc ce que c'est que l'Algèbre. Quand on propose une question de commerce, on suppose que l'on se déterminera à un certain prix, que l'on nomme x, afin d'en calculer le rapport avec les quantités qui sont connues. Ainsi x ne représente que le cas particulier auquel on se déterminera; & comme l'imagination peut parcourir des cas à l'infini, x les représentera successivement : c'est pourquoi on appelle x une expression générale, non pas qu'il soit le signe d'une idée générale; mais parce qu'il peut l'être de chaque idée particulière à laquelle l'imagination pourra se fixer.

$\times \overline{a-b} = \overline{m-b} \times n$; d'où l'on tire la proportion $a-b \,.\, m-b :: n \,.\, x$.

Or les deux équations précédentes, & les deux proportions que nous en avons déduites, nous fournissent des règles fort simples pour résoudre ces questions d'alliage, ainsi que je vais le faire voir.

Supposons que la pinte du premier vin $a = 25$ s. celle du 2[e] $b = 17$ s.; la pinte m (que l'on veut composer des deux premiers) $= 19$ s. & que le nombre n des pintes de ce dernier vin composé $= 13$. On veut sçavoir la portion x que l'on doit prendre de la première espèce, & la portion y de la 2[e], pour avoir 13 pintes à 19 s. la pinte.

Il n'y a qu'à prendre d'abord l'équation $x = \frac{\overline{m-b} \times n}{a-b}$, & y substituer les nombres représentés par les lettres a, b, m, n, elle deviendra $x = \frac{\overline{19-17} \times 13}{25-17} = \frac{2 \times 13}{8} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$; ce qui signifie qu'il faut prendre 3 pintes & $\frac{1}{4}$ du vin à 25 s. la pinte, & par conséquent 9 pintes & $\frac{3}{4}$ du vin à 17 s. la pinte : ce que l'on trouveroit effectivement en prenant l'équation $y = \frac{\overline{a-m} \times n}{a-b} =$ (en y substituant les nombres) $\frac{\overline{25-19} \times 13}{25-17} = \frac{6 \times 13}{8} = \frac{3 \times 13}{4} = \frac{39}{4} = 9$ & $\frac{3}{4}$, ainsi qu'on l'a conclu ci-dessus.

Et, pour convaincre le Lecteur que cette résolution est parfaite, il n'y a qu'à faire voir que les 3 pintes & $\frac{1}{4}$ du vin à 25 s. avec 9 pintes & $\frac{3}{4}$ du vin à 17 s. font exactement le même prix que 13 pintes d'un vin à 19 s. Or 3 pintes & $\frac{1}{4}$ du vin à 25 s. font 4 liv. 1 s. & $\frac{1}{4}$, & 9 pintes & $\frac{3}{4}$ du vin à 17 s. $=$ 8 liv. 5 s. $\frac{3}{4}$; ces deux sommes ad-

ditionnées font 12 liv. 7 ſ. Si l'on prend auſſi 13 pintes à 19 ſ. la pinte, elles couteront 247 ſ. qui font 12 liv. 7 ſ.

Voulez vous réſoudre autrement ce Problême général ? rappellez-vous que l'équation $x = \frac{\overline{m-b} \times n}{a-b}$ ſe décompoſe en cette proportion $a-b . m-b :: n . x$; ce qui ſignifie, prenez la différence du moindre prix au plus grand, & celle du moyen au moindre; dites enſuite : la première différence eſt à la ſeconde, comme le nombre n des pintes demandé eſt à la portion x du vin au plus haut prix. Par exemple, vous avez du vin à 9 ſols, & d'un autre à 15; vous voudriez en avoir 7 pintes à 11 ſ. alors $a = 15$, $b = 9$, $m = 11$, $n = 7$. Ainſi vous ferez cette proportion $15 - 9 . 11 - 9 :: 7 . x$; c'eſt-à-dire, $6 . 2 :: 7 . x = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; ce qui ſignifie qu'il faut prendre 2 pintes & $\frac{1}{3}$ du vin à 15 ſ. & par conſéquent, 4 pintes & $\frac{2}{3}$ du vin à 9 ſ. ce que vous trouverez encore, en vous rappellant que $y = \frac{\overline{a-m} \times n}{a-b}$ ſe décompoſe en cette proportion $a-b . a-m :: n . y$, ou $15 - 9 . 15 - 11 :: 7 . y$; c'eſt-à-dire, $6 . 4 :: 7 . y = \frac{4 \times 7}{6} = \frac{14}{3} = 4 \& \frac{2}{3}$, comme on vient de le voir.

Effectivement deux pintes & $\frac{1}{3}$ de vin à 15 ſ. la pinte font 35 ſ.; & 4 pintes & $\frac{2}{3}$ du vin à 9 ſ. produiſent 42 ſ. Ces deux ſommes réunies font 3 liv. 17 ſ.: or on aura la même valeur, en prenant 7 pintes à 11 ſ. la pinte, ainſi qu'il eſt très-évident. Le Problême ſe réſout donc très-parfaitement par une ſimple Règle de Trois & c'eſt tout ce que nous avions promis de trouver & de démontrer.

Mais quelquefois on propoſe ce Problême de

manière que la résolution en est indéterminée; c'est à dire, qu'il est susceptible d'une infinité de solutions, renfermées pourtant dans certaines limites.

PROBLÊME XVIII.

On a, par exemple, trois lingots d'or : le marc du premier est à 23 karats d'or pur, celui du second à 21, & celui du troisième à 18. On voudroit en composer un quatrième lingot pesant 9 marcs, à 22 karats. On suppose que chacun des lingots proposés soit assez considérable pour y prendre ce dont on a besoin. Quelle portion doit-on retirer de chacun des lingots donnés, pour avoir le lingot du poids & du titre proposés?

RÉSOLUTION.

Soit le marc $= p$, $23 = a$, $21 = b$, $18 = c$, $22 = m$, $9 = n$, la portion que l'on doit prendre du premier lingot $= x$; celle du second $= y$; & celle du troisième $= z$. Alors il est évident qu'en reprenant la solution générale de ce Problême, on a cette première équation $x + y + z = np$; & pour déterminer le titre ou la valeur de chacune de ces portions, on fera $p \,.\, a :: x \,.\, \frac{ax}{p}$ qui sera la valeur de la portion qu'on doit retirer du premier lingot. De même $\frac{by}{p}$ est celle de la seconde portion, & $\frac{cz}{p}$ celle de la troisième. Or ces trois portions prises ensemble doivent contenir autant de fois le titre demandé m, qu'il y a d'unités dans le nombre n des marcs que l'on veut avoir; ainsi $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} + \frac{cz}{p} = mn$, ou plus simplement $ax + by + cz = mnp$.

Toutes les conditions du Problême étant évidemment exprimées, on s'apperçoit d'abord que le Problême est indéterminé, parce qu'il y a trois inconnues & seulement deux équations; car il est impossible avec deux seules équations de chasser deux inconnues, pour qu'il n'en reste qu'une. On a déja vu que, pour chasser une inconnue, il falloit une équation de laquelle on pût tirer une expression de cette inconnue, en d'autres termes, afin qu'en substituant cette nouvelle expression, l'inconnue ne parût plus ou fût évanouie; donc, pour chasser deux inconnues, il faut deux équations, & il est besoin encore d'une troisième équation pour l'inconnue qui reste : par conséquent il faut trois équations pour résoudre un Problême à trois inconnues. On n'a ici que deux équations; on ne peut donc pas faire évanouir deux inconnues dans un pareil Problême : ainsi elles resteront ensemble, & pourront composer une somme. Or une même somme peut résulter de deux quantités, qui auront une infinité de valeurs différentes; par exemple, 15 peuvent résulter de $14 + 1$, de $13 + 2$, de $8 + 7$, &c. à l'infini. Ce Problême est donc indéterminé; mais si l'on détermine l'une des trois inconnues, les deux autres le feront absolument. Examinons donc quelles suppositions on peut faire, & dans quelles limites elles sont renfermées.

Reprenons la première équation $x + y + z = n$ (à cause de $p = 1$); on aura $x = n - y - z$; & $ax = an - ay - az$. Substituant cette valeur de ax dans la seconde équation $ax + by + cz = mn$ (à cause de $p = 1$), elle deviendra $an - ay - az + by + cz = mn$; & (en transposant) $an - mn = ay - by + az - cz$, ou $\overline{a - m} \times n = \overline{a - b} \times y$

$+\overline{a-c}\times z$. Soit (pour simplifier le calcul) la plus grande différence $a-c=d$, la 2[e] différence $a-b=s$, & la 3[e] $a-m=t$; alors l'équation $\overline{a-m}\times n=\overline{a-b}\times y+\overline{a-c}\times z$ devient $nt=sy+dz$. Donc $nt-dz=sy$; & $\frac{nt-dz}{s}=y$. Où l'on remarquera d'abord, que le produit dz de la plus grande différence d par l'inconnue z, ne doit pas surpasser le produit nt du nombre n des marcs par la moindre différence t: autrement y seroit une grandeur négative; & il est évident, par la question, que l'on ne cherche pas des quantités au-dessous du rien : on ne peut donc pas faire $z=2$: car ayant $d=a-c=23-18=5$, $t=a-m=23-22=1$, $n=9$, $s=a-b=23-21=2$, l'équation $y=\frac{nt-dz}{s}$ seroit $y=\frac{9-10}{2}=-\frac{1}{2}$ valeur au-dessous de rien. Il ne faudroit pas même supposer $z=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$, puisqu'alors $y=\frac{nt-dz}{s}$ deviendroit $y=\frac{9-9}{2}=\frac{0}{2}=0$: c'est-à-dire, qu'en ce cas on ne prendroit rien du 2[e] lingot; ce qui est contraire à une des conditions du Problême. * Si l'on veut donc résoudre cette question, conformément à ses conditions, on doit donner à z une valeur moindre que $\frac{9}{5}$. On peut faire z

* On trouve la grandeur de z propre à faire $y=0$; en supposant d'abord $y=0$: alors l'équation $y=\frac{nt-dz}{s}$ devient $0=\frac{-dz}{2}$ ou $0=nt-dz$: ainsi $dz=nt$; $z=\frac{nt}{d}=\frac{9}{5}=1+\frac{4}{5}$, ainsi qu'on vient de le supposer dan le Texte ou le discours supérieur.

$= \frac{8}{5}$ de marc; alors $y = \frac{nt - dz}{s} = \frac{\quad - \frac{8}{5}}{2}$ $= \frac{9 - 8}{2} = \frac{1}{2}$; ce qui signifie qu'en prenant $\frac{8}{5}$ ou 1 marc & $\frac{3}{5}$ du troisième lingot, il faudra prendre $\frac{1}{2}$ marc du second, & par conséquent 6 marcs & $\frac{9}{10}$ du premier : car ces trois quantités réunies font exactement 9 marcs, qui est la première condition du Problème. Il faut voir à présent, si l'on peut remplir la seconde condition, c'est-à-dire, si ces trois valeurs réunies composent autant de karats d'or pur que 9 marcs à 22 karats. Or $\frac{8}{5}$ ou 1 marc & $\frac{3}{5}$ à 18 karats, font 28 karats d'or pur & $\frac{4}{5}$ ou $= 28 + \frac{8}{10}$ pour la quantité extraite du troisième lingot. Le second lingot étant à 21 karats; comme l'on en prend $\frac{1}{2}$ marc, c'est 10 karats & $\frac{1}{2}$ d'or pur, ou 10 karats $+ \frac{5}{10}$ que fournit ce lingot; enfin prenant 6 marcs & $\frac{9}{10}$ du premier lingot, qui est à 23 karats d'or fin au marc, cela fera 158 karats & $\frac{7}{10}$ d'or pur que l'on en retirera : faisant ensuite la somme de $28 + \frac{8}{10}$, $10 + \frac{5}{10}$, $158 + \frac{7}{10}$, on la trouvera $= 198$ karats; & c'est précisément ce que fournissent d'or fin 9 marcs à 22 karats, ainsi qu'on le détermine en multipliant 22 par 9.

Veut-on supposer que l'on prenne 1 marc du troisième lingot? en ce cas $z = 1$; & l'équation $y = \frac{nt - dz}{s}$ devient $y = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$; laquelle fait voir que, quand on prend 1 marc du troisième lingot, il en faut prendre 2 du second, & par conséquent 6 du premier. Effectivement 1 marc du troisième lingot fournit 18 karats; 2 marcs du second, en donnent 42, & 6 marcs du premier en font 138 : or $18 + 42 + 138 = 198$ karats d'or pur, qui est précisément la même quantité que l'on trouvera dans 9 marcs à 22 karats. On pourra

faire tant de suppositions que l'on voudra pour la valeur de z, & toutes résoudront le Problème, pourvû que ces valeurs soient plus petites que $1 + \frac{4}{5}$, & plus grandes que o; ainsi les limites * de z sont $1 + \frac{4}{5}$ & o. Tous les nombres (compris entre ces deux termes) que l'on prendra pour z, satisferont à la question.

Ce que l'on vient de dire semble indiquer qu'il y a des quantités au-dessous de o ou de rien. Ces quantités ne sont-elles pas fictives; ou, comme l'on s'exprime vulgairement, ne sont-elles pas imaginaires? On va voir que les circonstances, qui y mènent, ne sont que trop ordinaires.

* *Les limites de z sont* $1 + \frac{4}{5}$ *&* o. Mais o ou le rien peut-il être la limite de quelque chose? Suivant l'expression de l'usage, ce qui n'est borné par rien, peut s'étendre à l'infini.

Les expressions communes ont, en général, fort peu de précision; au lieu qu'en Mathématique tout est exactement déterminé. On a déja vu qu'il y avoit des quantités positives & des quantités négatives. La fin ou l'extrémité d'une quantité positive, est ce que les Mathématiciens appellent précisément le *Rien* de cette quantité, & ce qu'ils expriment par o. Il est certain que l'extrémité d'une ligne, d'une surface, d'un corps, d'une quantité quelconque, existe bien réellement: ainsi, en langage Mathématique, le rien peut être & est en effet la limite de quelque chose.

Un homme, qui se propose d'aller en avant, regarde *comme quelque chose* les degrés de son progrès; *comme rien*, s'il ne s'est donné aucun mouvement; & *comme moins que rien*, s'il a reculé. Tous ces états sont très-réels, & par conséquent susceptibles d'expressions & de calcul. Le *rien* est précisément la limite de *quelque chose* & de *moins que rien*. Il faut des expressions pour ces vûes de l'esprit; o est l'expression de la première, + l'est de la seconde, & − l'est de la troisième. On ne sçauroit s'imaginer jusqu'où des expressions si simples ont porté l'esprit humain.

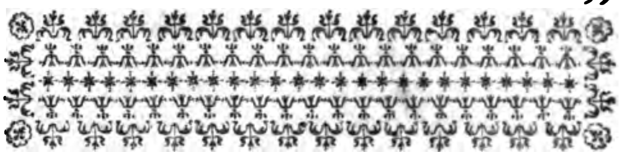
PROBLÊME XIX.

Un Marchand vient de quitter ſon commerce, & l'on voudroit ſçavoir quel eſt ſon état. Il le publie lui-même un peu énigmatiquement, en diſant que, ſi l'on souſtrayoit cinquante fois le nombre, qui exprime ſes facultés, du quarré de ce même nombre, il jouiroit de 399 millions. Cet homme eſt-il auſſi riche qu'il en a l'apparence ?

RESOLUTION.

Soit x le nombre qui exprime les facultés actuelles de ce Marchand, 399 millions $= a$, $50 = b$; il eſt évident que l'équation $xx - bx = a$, exprime toutes les conditions de ce Problême. Ainſi (en ſe conduiſant comme l'on a fait à la page 267, & comme il eſt démontré n°. 92.) $xx - bx + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}$; donc, ſi l'on extrait la racine quarrée de part & d'autre, l'on aura $x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$ (n°. 91.); par conſéquent $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$; & en ſubſtituant les nombres en la place des lettres a, b; extrayant enſuite la racine quarrée de ceux qui ſeront ſous le ſigne radical, on trouvera que le nombre cherché $x = 20000$ livres, ſi l'on prend la racine en $+$; mais que $x = - 19950$ livres, ſi l'on prend la racine en $-$; ce qui ſignifie que ce Marchand peut poſſéder 20 mille livres, ou qu'il peut être 19950 livres au deſſous de rien.

Ainſi, quoiqu'il n'y ait rien que de vrai dans la montre merveilleuſe de la fortune de ce Marchand, ſes facultés ſont très-équivoques. Car, ſoit qu'il ait un fond réel de 20000 livres; ſoit que, ſans rien avoir, il doive 19950 liv. ces deux états juſtifient également tout ce qu'il a dit au ſujet de ſes facultés.



INSTITUTIONS DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet de la Géométrie. Ses Principes. Sa Méthode.

NOUS naissons au milieu d'objets qui tiennent à nous, ou auxquels nous tenons par nos sens & par nos besoins. Ces objets ont reçu généralement le nom de *corps*.

Après les couleurs qui nous font distinguer les corps avec une si merveilleuse rapidité, ce qui nous frappe en eux, ou même ce qui nous y intéresse le plus, ce sont leurs *dimensions* (*a*). Ils vont

(*a*) *Dimensions*. C'est un nom général que l'on a donné aux côtés par lesquels on mesure les corps. Ce mot vient du mot latin *Dimensio*, dimension, mesure. Ceux qui enseignent aux enfans doivent leur faire remarquer ces dimensions sur le premier objet qui tombera sous leurs mains, sur une Règle, sur un Livre, sur une Table, où elles soient bien distinctement désignées.

En général on ne doit jamais faire une définition aux enfans,

en long, ils s'étendent en large, ils s'élèvent au-dessus ou s'abbaissent au-dessous..

Ce premier coup d'œil offre naturellement trois directions ou trois sens, par lesquels on peut déterminer toute l'étendue d'un corps, *longueur*, *largeur*, *épaisseur*, que l'on nomme aussi *hauteur* ou *profondeur* (*a*); mais cette détermination n'auroit jamais lieu, si l'on ne convenoit pas d'une certaine quantité fixe (*b*) à laquelle on doive rapporter les dimensions des corps. Lorsque l'on fait ou que l'on cherche ce rapport, cela s'appelle *mesurer*.

Pour mesurer avec précision, on s'est rendu attentif aux propriétés qui résultoient des dimensions de la matière, prises séparément ou combinées ensemble. On a remarqué d'abord que la distance entre deux objets seroit connue, dès que l'on auroit déterminé la longueur comprise entr'eux; mais que cette détermination seule ne suffisoit pas, lorsque l'on vouloit connoître l'étendue d'un jardin ou d'une plaine; qu'il falloit encore s'assurer de la mesure contenue dans sa largeur; & qu'enfin outre la longueur & la largeur d'une Table, il étoit besoin d'en reconnoître l'épaisseur, afin de juger de sa solidité.

Celui qui tenteroit de découvrir les propriétés

sans avoir auparavant bien exposé à leurs yeux la chose que l'on définit. Le nom ne doit aller qu'après l'idée, puisqu'il n'a été établi que pour la réveiller.

(*a*) *Epaisseur*, *hauteur*, *profondeur*. Ces trois mots ne sont pas indifférens dans le langage ordinaire; on dit la hauteur d'une piramide, l'épaisseur d'une poutre, la profondeur de la mer.

(*b*) *Si l'on ne convenoit pas d'une certaine quantité fixe*. . . On fera comprendre tout ce discours aux enfans, en leur montrant une toise, une aune, un pied, &c. On appliquera ces mesures sur une longueur que l'on se proposera de déterminer, & ils compteront assez d'eux-mêmes les toises, les pieds, les pouces, &c. que ces mesures offriront. Les enfans se plaisent beaucoup à ces exercices; ils les regardent plûtôt comme un divertissement que comme une étude.

des corps, sans prendre son objet par parties, sans passer des plus simples aux plus composées, succomberoit bientôt à ses recherches. C'est l'économie & non pas l'avidité qui enrichit.

On s'est donc attaché à rechercher d'abord les propriétés de la longeur séparément; puis celles qui pouvoient résulter de la combinaison d'une longueur avec une autre longueur, ou de la longueur avec la largeur; & l'on a fini par compliquer ensemble les trois dimensions des corps, la longueur, la largeur, l'épaisseur.

Toutes ces considérations ont produit un grand nombre de vérités, suffisantes même aux besoins de notre corps, besoins si prodigieusement multipliés dans l'état de la société, tandis qu'elles sont l'aliment le plus agréable de l'esprit.

Après cela on a travaillé à disposer ces vérités de manière que les plus aisées servissent à l'intelligence des plus difficiles; & c'est cet assemblage & cet ordre de vérités réunies en corps, qui forment la science que l'on appelle *Géométrie* (*a*).

La Géométrie est ou *spéculative* ou *pratique*.

La Géométrie spéculative fait connoître les vérités que l'on a découvertes sur les dimensions de la matière; elle montre leur ordre & leur mutuelle dépendance.

La Géométrie pratique ramène à notre utilité toutes ces spéculations.

Si les dimensions des corps n'existoient pas telles qu'on les suppose en Géométrie, quelqu'admirablement liées que fussent les conséquences avec les suppositions dont on les déduit, l'une & l'autre

(*a*) *Que l'on appelle Géométrie.* Définition de cette science. La Géométrie est l'assemblage & l'ordre des vérités réunies en corps, que l'on a découvertes en considérant les dimensions de la matière.

Géométries se réduiroient à une pure curiosité de l'esprit, qui se plaît à contempler l'architecture d'un systême imaginé à plaisir.

Mais puisque tous les ouvrages de la nature & ceux de l'art, qui ont le plus de droit à l'estime des hommes, ne tirent leur excellence & leur solidité que de ces suppositions, il faut donc qu'elles soient réelles.

1. Pour s'en convaincre, prenons une glace ou un miroir : nous ne pouvons toucher que sa surface; son épaisseur est dessous ou derrière : la surface d'un corps n'a donc pas d'épaisseur, ou, ce qui revient au même, l'épaisseur n'est pas une propriété de la surface; elle s'étend seulement en long & en large. Transportons notre main aux extrémités de cette surface, nous pouvons les toucher; parcourons, par exemple, la longueur qui la termine : puisque nous ne touchons que l'extrémité de la surface sans empiéter sur la largeur, il y a donc des dimensions qui n'ont point de largeur; ces dimensions sans largeur ont aussi des extrémités que l'on appelle des *points*, qui sont par conséquent sans aucune dimension : en effet qui pourroit mesurer l'extrémité d'une longueur?

Les principes de la Géométrie (a) sont donc ce

(a) *Les principes de la Géométrie sont ce qu'il y a de plus incontestable dans la nature.* L'esprit humain a des travers inconcevables; il va jusqu'à nier ce qu'il voit, ce qu'il touche. Parce que l'épaisseur des corps est toujours avec leur surface, que la longueur accompagne toujours la largeur, beaucoup de gens croient avoir droit de s'élever contre les Géomètres qui supposent des surfaces sans épaisseur, des longueurs ou des lignes sans largeur. Sur ce fondement ils publient que les principes de la Géométrie sont faux; ce qui ne laisse pas de les jetter dans un très-grand embarras, quand ils viennent à considérer que ces suppositions, prétendues fausses, conduisent nécessairement à des vérités que la nature étale à tous les yeux, & que les Arts supposent dans toutes leurs pratiques.

Mais on est dupe des mots. Qand les Géomètres supposent des surfaces sans épaisseur, ils ne veulent pas dire que l'épaisseur n'ac-

qu'il y a de plus inconteſtable dans la nature : le ſtupide & l'homme d'eſprit en ſont également frappés. La main qui touche, le répète à l'œil qui les voit.

Après avoir bien établi la certitude des principes de la Géométrie, expoſons la génération & l'enchaînement des vérités qu'ils produiſent avec tant de fécondité.

CHAPITRE II.

Des propriétés de la ligne droite. L'uſage que l'on en fait.

2. NOUS allons conſidérer la longueur des corps & leur largeur, comme décrites ſur une ſurface, dont aucunes parties ne ſoient plus élevées ni plus abbaiſſées les unes que les autres, ſur une ſurface bien polie & bien platte, que les Géomètres appellent *un plan*. La ſurface d'un miroir, d'une table de marbre, du papier ſur lequel on écrit, donne une idée aſſez parfaite du plan.

3. On a déja fait remarquer que les extrémités d'une ſurface plane n'avoient que de la longueur ſans aucune largeur (n°. 1.). Si les parties de cette longueur ne s'écartent ni à droite ni à gauche pendant tout ſon cours, comme le trait A B (*fig.* 1.); qu'elles ſoient bien directement les unes à la ſuite des autres; en un mot qu'on les enfile toutes d'un ſeul coup d'œil, cela s'appelle *une ligne droite* (*a*).

compagne pas les ſurfaces : cela ſignifie ſimplement que les ſurfaces n'ont point d'épaiſſeur; ce qui eſt effectivement vrai, puiſqu'il eſt impoſſible de toucher autre choſe dans une ſurface, que ſa longueur & ſa largeur. Je ſupplie que l'on accorde un moment d'attention à ces trois queſtions ; la ſurface d'une pièce d'eau eſt elle bien épaiſſe ? la diſtance de Paris à Rome eſt-elle bien large ? combien y a-t-il de toiſes, de pieds, de pouces, &c. dans l'extrémité d'une ligne ?

(*a*) Ceux qui définiſſent la ligne droite, *le plus court chemin que*

4. Une ligne pliée telle que la ligne OBS (*fig.* 2.) s'appelle *une ligne courbe*, ou simplement *une courbe*.

Quand elle fait des serpentemens semblables à ceux de la figure OMNST (*fig.* 3.), on la nomme *courbe à inflexion*.

Si une ligne courbe, qui a dirigé son cours d'un certain côté, paroit revenir tout à coup, c'est une *courbe à rebroussement*. Telle est la figure OMT. (*fig.* 4.)

Celle dont les parties se roulent les unes sur les autres, en s'éloignant toujours de leur centre ou de leur point de partance O, est appellée *spirale*, & quelquefois *volute* (*a*) comme la figure 5.

Nous ne faisons mention de toutes ces courbes, qui sont l'objet de la plus sublime Géométrie, que pour faire remarquer que la nature & l'art les offrent de tous côtés; elles se montrent dans les eaux courantes forcées de se détourner de leur cours. Les contours gracieux que l'on donne aux meubles, qui servent à la décoration de nos appartemens, ne sont le plus souvent que *des courbes à inflexions*. La spirale ou la volute se fait voir ordinairement aux chapiteaux des pilastres & des colonnes, qui contribuent si bien à la magnificence des Palais & des Temples (*b*).

l'on puisse mener entre deux points, ne consultent pas assez l'origine de nos idées Géométriques. Ce qui se présente à nous d'abord en voyant une ligne droite, c'est que toutes ses parties tendent si exactement du même côté, que l'âme ne se sent point portée à y admettre la moindre multiplicité : la propriété que la ligne droite a d'être le plus court chemin entre deux points, est une conséquence, & non pas le premier sentiment que l'on a de la ligne droite.

(*a*) Ce n'est pas qu'en Géométrie une spirale & une volute soient une même courbe; mais comme ces deux courbes présentent aux yeux la même apparence, on peut les désigner par le même mot.

(*b*) *Qui contribuent si bien*, &c. On fera remarquer tout cela aux enfans, afin que par la suite ces mots singuliers ne leur en imposent point. Nous avons observé bien des fois qu'un mot, qui n'est pas

5. Revenons

5. Revenons à la ligne droite (*fig.* 1.). Tout ce que l'on y remarque, c'est qu'elle s'étend en long, qu'elle a deux extrémités A, B, que l'on appelle des *points*, & comme (n°. 3.) pendant tout son cours aucune de ses parties ne s'écarte ni à droite ni à gauche, qu'elles suivent constamment la même direction; il est bien clair que la ligne droite AB marque le plus court chemin qu'il y a du point A au point B; toute autre, telle que ASB, sera nécessairement plus longue (*fig.* 6.): ainsi deux points marqués sur un plan, déterminent une ligne droite, puisqu'il ne s'offre qu'une direction unique à celui qui regarde de A en B.

PROBLÊME I.

6. Décrire ou tracer une ligne droite entre les deux points A, B.

RÉSOLUTION.

Cette pratique se peut éxécuter sur le papier ou sur le terrein (*a*).

Premièrement sur le papier. On appliquera la longueur d'une *règle* sur les deux points A, B, & l'on tirera la ligne AB du point A au point B, avec une *plume* ou un *crayon* (*b*).

d'un usage fort ordinaire aux enfans ni aux jeunes gens, leur paroît toujours signifier des choses fort au-dessus de leur portée: cela leur cause une sorte d'émotion, qui les fait entrer en soupçon de leurs forces. On obviera à cet inconvénient, en les familiarisant de bonne heure aux idées que ces mots représentent.

(*a*) *Sur le terrein*, c'est-à-dire, sur un champ, en pleine campagne, ou, ce qui est plus commode, sur le pavé d'un appartement.

(*b*) *Règle, plume, crayon:* je ne décris point tous ces instrumens; ils sont trop simples & trop communs.

REMARQUE.

L'éxécution de cette pratique dépend de la justesse de la règle. On s'assure qu'une règle est juste, en appliquant sur le point A la partie de la règle qui étoit d'abord vers B, & sur B la partie que l'on avoit posée sur A : on conduira, comme ci-devant, la pointe du crayon le long de la règle; si le second trait se confond parfaitement avec le premier, on aura une assez bonne preuve de la justesse de la règle.

Secondement sur le terrein. Quand la distance ne sera pas trop grande, on étendra un cordeau du point A au point B, que l'on appelle alors *points de station* (*a*). Le long du cordeau on fera un petit *sillon* (*b*) qui marquera la ligne droite AB (*fig.* 7.).

Si la distance est trop considérable, on opérera comme on va voir au problême deuxième.

Quand on travaille sur des *bois de construction* (*c*), comme font les Charpentiers, on trempe le cordeau dans une teinte noire; & après l'avoir bien tendu sur les extrémités de la ligne que l'on veut y tracer, en tenant ferme d'une main, on pince de l'autre le cordeau qu'on lâche tout-à-coup : la violence de son ressort fait détacher la couleur qui trace sur la pièce de bois la ligne droite, le long de laquelle on doit conduire la scie, ou tout autre instrument propre à donner au bois la forme que l'on se propose. Il est nécessaire quelquefois de se

(*a*) *Points de station.* Ce sont des points sur le terrein où l'on fait ses opérations.

(*b*) *Sillon.* C'est une raie ou une petite ouverture en terre qui s'étend en longueur.

(*c*) *Bois de construction.* C'est un bois propre à bâtir des édifices, & à faire des machines. Il est nécessaire que ce bois soit plus droit & plus uni que celui dont on se sert pour se chauffer.

conduire pendant la nuit sur une ligne droite, qu'il seroit fort dangereux de tracer pendant le jour : par éxemple, lorsqu'un Ingénieur (*a*) veut conduire un tranchée (*b*) vers une Ville assiégée qui fait feu de toutes ses défenses. Pour en venir à bout, on remarque bien exactement pendant le jour la direction qu'il faut donner à la tranchée ; on se fait des points remarquables, auxquels on pose pendant la nuit un feu que l'on cache à l'ennemi, & l'on dresse sur ce feu le travail des soldats.

PROBLÊME II.

7. Prolonger une ligne droite autant qu'il en est besoin.

RÉSOLUTION.

1°. Sur le papier. On se servira de la règle, comme on a fait au problême premier, ou bien on tendra un fil sur la ligne que l'on a déja, jusqu'à la distance où l'on se propose de la prolonger.

2°. Sur le terrein. A chaque extrémité de la ligne droite AB (*fig.* 8.) que l'on veut prolonger, on plantera un *piquet* (*c*) bien à plomb : au-delà de ces deux piquets on en plantera un troisième C, qui soit bien dans l'alignement des deux premiers A, B ; ce dont on jugera lorsque l'œil regardant

(*a*) Un Ingénieur est un homme qui conduit ou qui fait éxécuter les travaux militaires qui supposent quelque intelligence.

(*b*) Une tranchée n'est autre chose qu'une fosse que l'on creuse, afin de s'approcher, à couvert du feu de l'ennemi, d'une ville que l'on veut prendre, ou d'un poste dont on veut s'emparer.

(*c*) *Piquet* ou *jallon*. C'est un bâton long de 4, 5 ou 6 pieds, suivant la hauteur de celui qui opère, armé d'une pointe de fer par une de ses extrémités que l'on fiche en terre. On fait ensorte que ce bâton ne penche d'aucun côté par le moyen d'un plomb suspendu à un fil. On aura soin d'être fourni de piquets accompagnés de leur plomb ; les enfans ne demanderont pas mieux que de les planter, & d'imiter les Maîtres qui leur montreront comment on doit les aligner.

de A en B, ne verra plus le piquet C; car alors les trois piquets seront dans la même direction (n°. 3.). On pourra répéter cette opération autant qu'on le jugera à propos.

On tracera par ce même moyen une ligne droite fort longue, c'est-à-dire, que l'on plantera d'abord un piquet à chaque extrémité de cette ligne, & entre ces deux piquets on en plantera d'autres qui soient éxactement dans l'alignement des deux premiers.

REMARQUE.

Si l'on veut faire cette opération avec éxactitude, il ne faut pas que l'œil soit trop près du piquet où l'on fait l'observation: l'œil en seroit trop couvert; il ne pourroit pas juger avec certitude de la situation des autres piquets.

Démonstration de toutes ces pratiques.

Elle est fondée sur l'idée de la ligne droite (n°. 3.) dont toutes les parties doivent être enfilées d'un seul coup d'œil: le cordeau tendu produit le même effet; car la tension met toutes ses parties dans une même ligne droite, ainsi que l'expérience le fait voir.

Comme c'est par la ligne droite que l'on détermine la distance des objets, & l'étendue de toutes les dimensions d'un corps ou de sa surface, il faut voir comment on la mesure sur le terrein; car sur le papier il n'y a aucune difficulté.

PROBLÊME III.

8. Mesurer une ligne droite AB sur le terrein (*fig. 9.*).

RÉSOLUTION.

Après avoir tracé cette ligne avec des piquets, si elle n'est pas plus longue que celles qui forment les allées d'un jardin ordinaire, on étendra dessus un cordeau d'une mesure connue qui contiendra, par éxemple, 4 toises, dont il y en aura une divisée en pieds, & même un des pieds divisé en pouces; & par ce moyen la mesure de la ligne A B sera facilement connue.

Mais, quand la ligne A B aura une longueur considérable, deux hommes seront employés à cette opération; & prenant chacun une extrémité du cordeau ou de la chaîne, celui qui doit marcher devant l'autre de A vers B, se chargera d'un nombre de piquets qu'il jugera à peu près convenable: ces deux hommes tendront la chaîne dans la direction de la ligne A B depuis A jusqu'en C, où celui qui va devant plantera un piquet; après cette première opération ils marcheront tous deux en avant sur la ligne A B; & le second étant arrivé au point C, ils tendront la chaîne depuis C jusqu'en D, où le premier plantera un second piquet: celui qui marche derrière enlèvera le piquet C; & continuant leur marche dans la direction de la ligne A B, après chaque coup de cordeau (*a*), l'un plantera des piquets, & l'autre les enlèvera ainsi que nous l'avons décrit.

Quand ils seront arrivés à l'extrémité de la ligne A B, on comptera les piquets, dont le nombre indiquera la quantité des coups de cordeau, & par conséquent les toises, les pieds & les pouces contenus dans la longueur A B.

(*a*) On dit que l'on donne *un coup de cordeau*, quand on étend la chaîne ou la corde d'un piquet à l'autre.

CHAPITRE III.

De la ligne droite combinée avec une autre ligne droite. Origine & génération de la ligne circulaire. Vérités qui en résultent. Avantages pour tous les Arts.

AXIOME (*a*).

Deux lignes droites, mises l'une sur l'autre, s'ajusteront parfaitement, ou ne feront qu'une seule & même ligne.

9. La considération d'une ligne droite toute seule ne mène pas loin; c'est la combinaison d'une ou de plusieurs lignes avec d'autres qui multiplie les objets, en même tems qu'elle ouvre une plus grande carrière aux spéculations (*b*).

Suivant la sage méthode de la Géométrie, qui ne s'empare que pied à pied du vaste champ des vérités, combinons seulement une ligne droite avec une autre ligne droite, & voyons ce qu'il en arrivera.

La ligne A B, située sur le même plan que la ligne C D, la rencontre (*fig.* 10.), ou est seulement déterminée à la rencontrer (*fig.* 11.), ou enfin n'a aucune tendance vers elle (*fig.* 12.).

Supposons qu'elle la rencontre (*fig.* 10.) au point D. Outre les deux lignes A B, C D, on voit naître au point D deux encognures, ou plutôt

(*a*) Un *Axiôme* est une vérité si claire que, pour être comprise, elle n'a besoin que d'être proposée.

(*b*) *Spéculation*. C'est l'action d'un homme qui médite attentivement sur un objet. Ce mot vient du latin *speculatio*, observation.

deux coins, en prenant le dedans ou le creux de la figure : l'un ou l'autre coin s'appelle un *angle* (*a*); le point D de rencontre en est le *sommet*; A D, C D sont les *côtés* de l'angle *r*, & B D, C D le sont de l'angle *s* (*b*).

(*a*) Nous désignerons un *angle* par une petite lettre mise en dedans vers sa pointe, comme on le voit, *fig.* 10, ou bien par trois lettres, dont celle du milieu désignera le sommet de l'angle. Ainsi pour désigner l'angle *r*, on diroit l'angle A D C ou C D A, à cause que l'angle se trouve au point D; & l'on ne pourroit pas dire l'angle D C A; car il n'y a point d'angle au point C.

(*b*) Lorsque je me suis mis à composer ces Institutions, j'ai cru devoir me défendre absolument la lecture des Auteurs qui ont travaillé sur la même matiere. Nous sommes si naturellement portés à l'imitation, que l'on prend, sans y penser, le ton, la manière, le style, les idées mêmes des Ecrivains que l'on étudie. Rien au monde ne rend le génie aussi paresseux qu'une grande lecture. On s'accoutume si fort à penser par autrui, que l'on devient incapable de produire rien par soi-même.

C'est pourquoi cet Ouvrage étoit fini, quand la curiosité m'a pris de voir les Elémens de M. Arnauld (seconde édit. M. DC. LXXXIII). On m'a dit tant de fois qu'il avoit travaillé sur un plan nouveau, que je n'ai pû résister à l'envie d'examiner en quoi nous nous sommes rencontrés.

Mon plan général est totalement différent du sien. Ses propositions ne sont point engendrées les unes des autres. On lui est redevable, à la vérité, d'avoir cherché à faire mieux que ses prédécesseurs : il y a réussi en partie; mais il me paroît que cet Auteur étoit un peu trop dominé par l'envie de détruire. Il a attaqué les Anciens sur des principes dont les fondemens me paroissent très-solidement établis. J'ai fait quelques notes à cette occasion. Je les ai placées aux endroits que mon sujet m'a indiqués. On verra si M. Arnauld ne s'est pas laissé aller au-delà des bornes d'une juste réforme.

Par exemple, il prétend (liv. 8. art. 1.) qu'*après avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles qui sont plus composés que les lignes, tenant quelque chose des surfaces.*

Me sera-t-il permis de dire que c'est-là incidenter sur les mots ? Il est vrai qu'une ligne toute seule est moins composée qu'un angle, qui résulte nécessairement de l'intersection de deux lignes, mais la combinaison de plusieurs lignes, leur position les unes à l'égard des autres, offrent-elles quelque chose de moins composé qu'un angle ? C'est cependant cette combinaison de lignes, dont M. Arnauld recherche les propriétés dès l'entrée de sa Géométrie, immédiatement après avoir donné la définition de la ligne droite; & par conséquent cet Auteur tombe dans l'inconvénient qu'il veut éviter.

C'est toujours par rapport à notre intelligence que l'on doit juger de la composition des choses. Si mon ame apperçoit un angle aussi facilement qu'une ligne, & plus facilement que la combinaison de plusieurs lignes, je n'en rejetterai pas la considération, en cas que j'y sois entraîné par mon sujet, sur le fondement qu'un

10. Comme la ligne C D penche ou s'incline beaucoup plus du côté de A que du côté de B, l'angle *r* paroît aussi plus serré, plus étroit, moins ouvert que l'angle *s*; dans ce cas l'angle *r* est un *angle aigu*, & *s* est un *angle obtus*.

Mais il peut arriver que C D rencontrant A B, ne s'incline d'aucun côté (*fig.* 13.); alors l'angle *r* est un *angle droit* aussi-bien que l'angle *s*, & l'un & l'autre sont égaux, puisque leur inégalité ne pourroit procéder que de la ligne C D, qui s'inclineroit plus d'un côté que de l'autre, ce que l'on ne suppose pas.

11. Non-seulement l'angle droit $r = s$; mais en général tous les angles droits sont égaux (*a*): par

angle est composé de plusieurs lignes, & que la ligne n'admet point de composition. Or la perception d'un angle ne m'est pas plus pénible que celle d'une ligne. L'angle est le premier effet de deux lignes qui se compliquent.

On ne doit donc pas se dispenser de considérer les angles, quand on considère, comme a fait M. Arnauld, & après lui le P. Lami, la position des lignes les unes à l'égard des autres; car on néglige précisément le premier effet de cette position, & l'on manque conséquemment la génération immédiate des vérités qui en naissent. C'est à cette considération que nous devons nous-mêmes la chaîne non interrompue de toutes les Propositions de cette Géométrie.

(*a*) On peut faire toucher cette vérité aux yeux des enfans. Il n'y a qu'à prendre deux *équerres* (*), dont les côtés de l'une soient plus longs que les côtés de l'autre, afin que les enfans ne s'imaginent pas que l'égalité des côtés contribue à celle des angles; on ajustera les côtés de l'équerre la plus courte sur les côtés de la plus longue, ce qui produira une correspondance parfaite.

D'ailleurs, il y a des meubles qu'on nomme *encognures*. On en voit dans beaucoup d'appartemens; rien n'est plus propre à faire comprendre aux enfans que tous les angles droits sont égaux. Comme ces encognures ont deux faces qui forment un angle droit, elles s'ajustent avec une précision parfaite à tous les coins indifféremment. Les Architectes ayant envisagé que l'angle droit étoit de tous les angles le plus commode & le plus solide, observent généralement dans la pratique que les murailles d'un appartement se rencontrent à angles droits: c'est pourquoi les Artisans n'ont point besoin de prendre la mesure du coin d'un appartement afin d'y placer une encognure.

(*) L'*équerre* est un instrument composé de deux branches qui forment un angle droit.

exemple, l'angle droit *a* de la figure 14, eſt égal à l'angle *r* de la figure 13; car portant P M ſur D A, le point P ſur le point D, il ſera facile de coucher la droite P M ſur la droite D A : ces deux lignes ainſi poſées, ne feront qu'une ſeule & même droite, ſur laquelle C D, O P ſont ſuppoſées ne point pencher; O P ſe confondra donc avec C D. Ces deux lignes ne pourroient ſe dégager l'une de l'autre qu'en tant que l'une des deux s'écarteroit à droite ou à gauche; ce qui eſt contraire à la ſuppoſition.

12. La ligne CD (*fig.* 10.) qui fait les angles *r*, *s* inégaux, c'eſt-à-dire, qui s'incline plus du côté de A que du côté de B, eſt dite *oblique* par rapport à la ligne A B; mais lorſqu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre, elle eſt dite *perpendiculaire* à la ligne A B. (*fig.* 15.).

Ainſi au même point D d'une ligne droite A B, il n'eſt pas poſſible d'élever plus d'une perpendiculaire C D. On voit bien que toute autre ligne, comme D S, pencheroit plus d'un côté que de l'autre.

13. Mais comment s'aſſurer qu'une ligne eſt perpendiculaire ou oblique? Qu'eſt-ce qui nous dira bien préciſément qu'un angle eſt égal à un autre, qu'il eſt plus grand ou qu'il eſt plus petit? C'eſt-là ce qui nous intéreſſe : la comparaiſon eſt une ſource inépuiſable de vérités, & même le ſeul moyen de déterminer l'étendue d'une dimenſion (*a*).

(*a*) *La comparaiſon eſt ... le ſeul moyen de déterminer l'étendue d'une dimenſion.* Il faut accoutumer de bonne heure les enfans à remarquer que nous ne connoiſſons les *grandeurs* ou *les quantités* que par comparaiſon; ce qu'il eſt très-facile de leur faire entendre, en leur propoſant des queſtions ſur la grandeur ou la petiteſſe des premiers objets que l'on aura ſous les mains ou ſous les yeux. Ils ne manqueront pas de répondre qu'une table eſt trop haute, puiſqu'ils ne ſçauroient y atteindre; que le grain que l'on donne aux oiſeaux eſt fort petit, qu'ils en mettroient plus de mille dans une main : ainſi leur

Voyons comment l'angle A D C (*fig.* 16.) peut devenir plus grand. Supposons une charnière au point D, & faisons tourner tout d'une piece le côté C D autour du point D; il deviendra successivement D O, D T, & l'angle A D C sera A D O ou A D T.

L'angle A D C croît donc par le mouvement d'un ou de ses deux côtés autour du point D; son aggrandissement doit donc être mesuré par une ligne tournante, c'est-à-dire, par une ligne qui suive tous les mouvemens du côté C D.

Mais, tandis que le tournoiement du côté C D fait croître l'angle A D C, son extrémité C décrit la ligne ponctuée C O T qui répond éxactement à chaque mouvement du côté C D: ainsi, puisque la ligne C O T répond si juste à la grandeur des angles, on a dû la prendre pour leur mesure.

14. Il est évident que C D (*fig.* 17.) peut faire sa révolution tout autour du point D; que son extrémité C peut courir la ligne tournante C C C &c. jusqu'à ce qu'étant venue en B, elle soit dans la même direction que la ligne A D, où elle cessera par conséquent de faire aucun angle. Que la ligne C D, arrivée en B, peut descendre par la ligne O O O, &c. pour remonter en A; en un mot tracer en-dessous de A B la même ligne qu'elle a décrite en-dessus.

On appelle *cercle* l'espace renfermé en-dedans de la ligne C C C O O O nommée *circonférence*, parce que toutes ses parties sont disposées autour d'un point D, auquel on a donné le nom de *centre*.

L'angle est donc l'origine du cercle & de sa circonférence. On ne sçauroit augmenter ni diminuer un angle par un mouvement continu, sans

corps ou leur main sont les termes de la comparaison; c'est-là-dessus qu'ils mesurent l'étendue des autres corps.

tracer en même tems une portion de cercle & de circonférence ; c'est pourquoi la circonférence du cercle destinée à évaluer les angles, n'est pas une mesure arbitraire ou prise à plaisir : la nature l'a attachée à la génération des angles, & elle en a fait présent à celui qui a eu le mérite de s'en appercevoir (*a*).

Dans un cercle (*fig.* 17.) la distance DC du centre D à la circonférence CCC, est un *rayon*.

15. Puisque c'est la même ligne CD qui trace la circonférence, tous les DC, c'est-à-dire, tous les rayons du cercle sont égaux.

En prolongeant CD jusqu'au point opposé O de la circonférence, on aura une ligne CDO qui passe par le centre, & qui aboutit à deux points de la circonférence ; elle s'appelle un *diamétre*. Tous les diamètres d'un cercle contiennent deux rayons ; ils sont par conséquent égaux entr'eux.

16. Toute ligne (*fig.* 19.) comme AB terminée à deux points A, B de la circonférence, sans passer par le centre D, prend le nom de *corde* ou *sous-tendante*, parce qu'elle représente une corde tendue sous la portion de circonférence AOB que l'on appelle un *arc*. Il est clair que le diamètre CDS est la plus grande de toutes les cordes.

La circonférence du cercle étant la mesure na-

(*a*) Ceux qui enseigneront la Géométrie aux enfans, saisiront une occasion aussi simple de leur donner l'esprit d'observation. On prendra deux règles égales qui se croisent par le milieu O, où elles sont attachées par le moyen d'un petit axe sur lequel elles peuvent tourner (*fig.* 18.). On fixera l'une de ces règles sur une table, & l'on fera tourner l'autre, à l'extrémité de laquelle il seroit bon d'avoir ajusté une pointe posée verticalement, c'est-à-dire, de haut en bas. Il vaut mieux commencer par poser la règle mobile tout le long de la règle fixe. Dans ce cas il n'y aura point d'angle ; mais dès que l'on fera mouvoir la règle mobile, on fera appercevoir aux enfans l'encognure ou l'angle qui se forme au centre, en même tems que la pointe trace une portion de circonférence, dont elle laisse une impression sur la table. Après cela on leur fera voir que le compas produit le même effet.

turelle des angles (nº. 13.) nous pouvons nous en servir pour les comparer (*a*).

PROBLÊME IV.

17. On veut sçavoir lequel des deux angles *r*, *s* est le plus grand (*fig.* 20. & 21.).

RÉSOLUTION.

On prendra un compas dont on ouvrira les jambes. On posera une de ses pointes sur le sommet A de l'angle *r* (*fig.* 20.) : autour du point A, on fera tourner l'autre branche, afin que son extrémité décrive l'arc B M D entre les côtés A B, A D de l'angle *r*. On fera la même opération sur l'angle *s* (*fig.* 21.) avec la même ouverture du compas, qui donnera l'arc O N T. On prendra cet arc ou plutôt sa corde (*b*) que l'on portera sur l'arc B M D depuis B jusqu'en P, & l'on verra par-là que l'angle *r* est plus grand que l'angle *s*, puisqu'il a un arc ou une mesure plus grande.

On se sert du même artifice pour faire un angle égal à un angle proposé.

(*a*) La circonférence du cercle étant uniforme, les arcs croissent comme les angles, leur mesure est fondée sur cette correspondance qui est si parfaite.

(*b*) On doit faire obsérver aux enfans que le compas ne donne point la longueur des arcs, mais simplement la longueur de leur corde ou de leur sous-tendante; qu'en ouvrant le compas depuis T jusqu'en O, on n'a pas la longueur de l'arc TNO; on a celle de sa corde TO : c'est pourquoi on ne juge, à proprement parler, que l'arc BMD est plus grand que ONT, qu'à cause que la corde BD est plus grande que la corde OT; parce que sur des circonférences décrites du même rayon, une plus grande corde soutient nécessairement un plus grand arc : cela vient de l'uniformité de la circonférence. On doit prendre garde à cette observation; car les commençans croient qu'avec le compas ils prennent réellement des arcs.

PROBLÊME. V.

18. Au point A de la ligne AB faire un angle égal à l'angle donné COD (*fig.* 22. & 23.).

RÉSOLUTION.

Du point O & d'une ouverture de compas à volonté, décrivez l'arc CD entre les côtés de l'angle COD (*fig.* 23.). Ensuite avec la même ouverture de compas & du point A, décrivez l'arc indéfini BMS (*fig.* 22.), sur lequel vous porterez CD depuis B jusqu'en M, où tirant la ligne AM, l'angle BAM sera égal à l'angle COD, puisque la mesure de l'un a été faite égale à la mesure de l'autre.

19. Que les côtés d'un angle soient fort courts ou très-allongés, cela ne fait rien à sa grandeur ; elle dépend uniquement de l'inclinaison plus ou moins grande de ses côtés l'un sur l'autre.

Allongez le côté BC de l'angle *a* (*fig.* 24.) jusqu'en S, & son autre côté BD jusqu'en R ; comme vous n'avez pas fait tourner le côté BC sur la charnière B, l'ouverture de l'angle *a* est restée telle qu'elle étoit avant le prolongement de ses côtés. A la même distance du point B vous trouverez toujours le même arc CD pour sa mesure.

Cela paroîtra encore plus sensible en comparant l'angle *a* avec l'angle *r* (*fig.* 25. & 26.). Quoique les côtés OM, OP de l'angle *r* (*fig.* 26.) soient beaucoup plus longs que les côtés BC, BD de l'angle *a* (*fig.* 25.) ; c'est néanmoins une chose qui saute aux yeux que l'angle *a* est plus grand que l'angle *r*. C'est pourquoi si d'une même ouverture de compas on décrit les arcs CD, XY, l'arc

C D eſt beaucoup plus étendu que l'arc X Y de l'angle *r*, dont les côtés ſont ſi longs.

20. Comme il ne ſuffit pas de ſçavoir en général qu'un angle eſt égal à un autre, qu'il eſt plus grand ou plus petit; mais qu'il eſt beſoin d'en déterminer la grandeur ou l'excès, afin que l'on puiſſe ſe le repréſenter même ſans figure, on eſt convenu de diviſer la circonférence d'un cercle en 360 parties appellées *degrés*; enſorte qu'un degré eſt toujours la trois cent ſoixantieme partie d'une circonférence grande ou petite.

Ainſi l'on doit entendre qu'un angle a une certaine grandeur, en déterminant le nombre des degrés compris entre ſes côtés. On dira, par éxemple, que l'angle *a* eſt de 29 degrés, (*fig.* 27.) ſoit que l'on prenne ſa meſure avec l'arc B C ou avec l'arc O S > B C; parce que O S contient 29 degrés de ſa circonférence, de même que B C en contient 29 de la ſienne. Cela vient de ce que la grandeur d'un angle ne dépend point de la longueur de ſes côtés (n°. 19).

Cependant, ſi l'on comparoit deux angles, il ſeroit à la vérité très-libre de les meſurer avec quelle circonférence l'on voudroit; mais cette circonférence une fois déterminée pour un angle, doit ſervir de meſure à l'autre; parce que, quand on demande la différence de deux angles, on veut dire la différence de leur ouverture à la même diſtance du ſommet.

Quand on meſure un angle, il arrive aſſez ſouvent qu'il ne contient pas un nombre juſte de degrés, qu'il en contient, par éxemple, 40 & quelque choſe. Afin de pouvoir déſigner ces excès, on eſt encore convenu de diviſer chaque degré en 60 parties appellées *minutes*. On dira donc que l'angle O (*fig.* 28.) eſt de 40 degrés 30 minutes; ce que

l'on a coutume d'exprimer ainsi $40^d. 30'$.

L'expérience apprend que la division de la circonférence en degrés & en minutes n'est pas suffisante; c'est pourquoi on a divisé la minute en 60 parties appellées *secondes*, & même la seconde en 60 parties nommées, *tierces &c.* L'on a continué cette division, tant que le besoin s'est fait sentir. Cette expression $15^d. 18'. 12''. 3'''$. signifie 15 degrés, 18 minutes, 12 secondes, 3 tierces.

21. La division de la circonférence du cercle en degrés, en minutes, &c. a donné naissance à deux instrumens très-simples & fort commodes pour prendre la valeur des angles sur le papier ou sur le terrein. Celui qui sert à déterminer la valeur des angles sur le papier, se nomme *Rapporteur* (voyez la figure 29.); c'est un demi-cercle dont la circonférence est divisée en 180 degrés, moitié de 360. Cet instrument montre sur son bord appellé *limbe*, des chiffres qui désignent le nombre des degrés que contient chaque division.

PROBLÊME VI.

22. Vous voulez sçavoir de combien de degrés est l'angle *a* (*fig.* 30.)?

RÉSOLUTION.

Posez le centre C du rapporteur sur le sommet C de l'angle *a*. Que le rayon C B de l'instrument soit couché bien exactement sur le côté C N, & remarquez sur le limbe du rapporteur à quel degré l'autre côté C M de l'angle *a* coupe la circonférence du rapporteur; si vous trouvez 45, l'angle *a* est un angle de 45 degrés.

23. L'instrument avec lequel on prend la valeur

des angles sur le terrein, s'appelle *Graphomètre* (*a*) ou *Astrolabe*; il ne différe du rapporteur qu'en ce qu'il porte à son centre une règle mobile ou *alidade* O S (*fig.* 31.) aussi longue que le diamètre de l'instrument A C B. A chaque extrémité de l'alidade & du diamètre est une pièce verticale, c'est-à-dire, qui s'élève perpendiculairement de bas en haut, à peu près quarrée, fendue de haut en bas afin que l'on puisse observer les objets; on l'appelle une *pinnule*: O N, M S sont des pinnules (*b*).

Le graphomètre est quelquefois accompagné d'une *lunette*, pour discerner les objets éloignés avec plus de distinction. On y ajoute même une *boussole*; c'est une aiguille aimantée, qui a la propriété de se diriger constamment ou à très-peu près vers le même point du Ciel, de même qu'une pierre ou tout corps pesant, jetté en l'air, affecte de tomber par une ligne verticale. Cette boussole sert à déterminer la position des objets par rapport à l'Orient ou au lever du Soleil, ce qui s'appelle les *orienter*.

Quand on veut se servir de cet instrument, pour déterminer la valeur des angles, on le dispose sur un support à trois branches (*fig.* 31.) d'une hauteur proportionnée à celle de l'observateur; on lui fait prendre la situation dont on a besoin par le moyen d'un *genou* (*c*), qui permet au graphomètre un mouvement en tout sens.

(*a*) *Graphomètre* est un mot Grec qui signifie description de mesures. Si l'on vouloit donner un nom françois à cet instrument, il faudroit l'appeller *Mesurangle*.

(*b*) Nous ne donnons pas ici une description finie du Rapporteur ni du Graphomètre. Ceux qui enseignent aux enfans doivent la faire sur l'instrument même. Il leur sera facile de suppléer ce qui manque à ce que nous venons d'en dire, notre dessein étant de n'expliquer les choses qu'à mesure que la nécessité les amène.

(*c*) *Genou*, c'est une pièce du Graphomètre, que l'on met au haut du pied qui soutient cet instrument, pour faire les observations. Elle

PROBLÊME

PROBLÊME VII.

24. Un œil placé en C, qui regarderoit l'arbre RL, verroit sa hauteur sous l'angle RCL, que l'on veut déterminer (*fig. 31.*).

RÉSOLUTION.

Disposez le Graphomètre de manière que son centre réponde bien juste au point C où l'on fait l'observation. Allignez le diamètre AB au pied de l'arbre L, & fixez l'instrument dans cette position. Faites ensuite tourner l'alidade OS sur son centre, jusqu'à ce qu'elle soit bien exactement dans la direction du point C au sommet R du même arbre : le nombre des degrés sur le limbe de l'instrument, compris entre l'extrémité B du diamètre & l'extrémité O de l'alidade, marquera la valeur de l'angle, RCL, sous lequel on voit la distance RL (*a*).

est faite ordinairement d'un globe de cuivre enfermé dans un demi-globe creux, où elle est mobile en tout sens.

(*a*) Nous ne saurions trop le répéter ; avec les enfans la pratique doit être la compagne inséparable de la Théorie. On leur fera la description du Graphomètre, l'instrument devant les yeux, on ira au jardin, ou même, sans sortir de l'appartement, on leur fera voir comment on prend l'angle sous lequel deux objets paroissent distans l'un de l'autre.

Cet appareil, qui frappe beaucoup les sens, & qui donne lieu aux enfans de s'agiter, a pour eux un attrait inconcevable. Les vérités que le plaisir trace dans la mémoire, ne s'effacent presque jamais.

D'ailleurs, comme c'est la pratique des vertus qui fait l'honnête homme, & non leur simple connoissance, c'est aussi la pratique des vérités reconnues qui rendent l'esprit ferme sur ses principes.

Nous sera-t-il permis de hasarder une idée ? La théorie des sciences, à la prendre dans son origine, seroit-elle autre chose qu'une pratique réfléchie ? Sur ce pied, notre méthode de faire toucher une vérité aux yeux, ou de la faire entrer par tous les sens, pénétreroit de lumières jusqu'aux stupides ou à ces végétans, qui ne sentent, pour ainsi dire, que leur propre existence.

REMARQUE.

25. On pouvoit diviser la circonférence du cercle en un nombre de degrés bien différent de 360. Il paroît que l'on ne s'est arrêté à ce nombre qu'après avoir reconnu qu'il étoit très-commode pour le calcul, parce qu'il est susceptible d'un très-grand nombre de divisions, sans aucun reste, comme l'on peut voir par la Table que l'on a devant les yeux.

Table, à deux colonnes, où l'on voit tous les nombres qui divisent exactement le nombre 360.

1	360
2	180
3	120
4	90
5	72
6	60
8	45
9	40
10	36
12	30
15	24
18	20

Nous avons déjà observé que l'angle droit est formé par la rencontre d'une ligne perpendiculaire à une autre. Puis donc que la circonférence du cercle est la mesure naturelle des angles, elle doit nous fournir le moyen d'avoir des perpendiculaires.

PROBLÊME VIII.

26. On propose d'élever une perpendiculaire sur la ligne AB au point C (*fig.* 32.).

RÉSOLUTION.

Comme deux points déterminent une ligne droite, & que l'on a déjà le point C, il est clair que le problême se réduit à trouver un point au-dessus de la ligne AB, qui ne penche pas plus du côté de A que du côté de B.

1°. Sur le papier. A droite & à gauche du point C, prenez avec le compas deux points A, B également éloignés du point C ; ces deux distances étant déterminées, vous ouvrirez un peu plus le compas ; vous poserez ensuite une de ses pointes sur le point A, & vous tracerez avec l'autre la portion de circonférence, ou l'arc OS ; vous ferez une semblable opération au point B avec la même ouverture de compas, pour avoir l'arc MN qui coupera OS au point I ; de ce point, tirez avec la règle une ligne jusqu'au point C, elle sera la perpendiculaire que l'on demande.

DÉMONSTRATION.

Le point I d'intersection (*a*) des deux arcs ne penche pas plus du côté de A que du côté de B, puisque la distance de ces points au point I est la même ouverture du compas (par la construction (*b*) ;) le point C de la ligne IC est aussi (par la

(*a*) *Point d'intersection.* C'est le point où deux lignes s'entrecoupent ; ce mot vient du latin *intersecare*, entrecouper.

(*b*) *Construction.* Ce sont les suppositions accordées, ou les lignes

construction) à égale distance de A & de B: ainsi toute la ligne I C ne penche d'aucun côté; elle est donc perpendiculaire.

PROBLÊME IX.

27. Le point C, d'où l'on veut avoir une perpendiculaire sur A B, peut être donné hors de la ligne A B. Comment s'y prendre pour y parvenir (*fig. 33.*)?

RÉSOLUTION.

Posez une des pointes du compas sur le point C: donnez au compas une ouverture telle qu'en décrivant l'arc *o r s t*, cet arc coupe la ligne A B aux points *r*, *s*; (ce que la première tentative apprendra.) De ces points *r*, *s*, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de la ligne *r s* (*a*), décrivez les deux arcs *g h*, *m n*, qui s'entrecoupent au point P en-dessus ou en-dessous de la ligne A B; par les points C, P, tirez une ligne C D jusqu'à la rencontre de A B, elle lui sera perpendiculaire. Ce qui est assez évident par le Problême précédent; puisque cette ligne a deux points C, P, qui ne penchent pas plus du côté de *r* que du côté de *s*.

28. Avec une opération aussi simple que celle d'élever ou d'abaisser des perpendiculaires sur une ligne, on a construit deux instrumens beaucoup plus commodes que le Rapporteur & le Grapho-

données que l'on emploie à la résolution d'un problême. Cela revient aux étais ou aux échaffaudages dont ont se sert pour la construction des édifices.

(*a*) *Plus grande que la moitié de r s....* C'est afin que les arcs, décrits des points *r*, *s*, puissent s'entrecouper.

mètre, pour avoir des angles droits, ou, ce qui est la même chose, pour tracer des perpendiculaires sur le papier & sur le terrein; nous voulons parler de l'*Equerre* & du *Bâton d'Arpenteur*.

L'Equerre est composée de deux règles AB, BC, (*fig.* 34) fixes ou mobiles, qui se rencontrent aux points B, S perpendiculairement, & dont par conséquent l'angle ABC est un angle droit. La matière de cet instrument peut être de verre, de bois, de fer, de cuivre, &c.

Quand on veut avoir une perpendiculaire sur une ligne, on couche une des branches de l'équerre sur la ligne proposée, & l'on trace le long de l'autre branche un trait avec une pointe ou un crayon : ce trait est visiblement une perpendiculaire, ainsi que la branche de l'équerre (*a*).

Une équerre qui ne seroit pas construite avec justesse, produiroit une fausse opération; c'est pourquoi il est utile de savoir vérifier cet instrument.

PROBLÊME X.

29. Trouver le moyen de vérifier une équerre (*fig.* 35).

RÉSOLUTION.

Posez l'équerre sur un plan, & tirez le long de ces deux branches les deux lignes AB, BD qui

(*a*) Les angles d'une table sont ordinairement des angles droits. Ceux d'un livre, des cartes à jouer, d'un dé, d'une regle le sont aussi. Les Artisans font un usage continuel de l'équerre. L'angle droit, que cet instrument donne, est le plus solide, le plu. commode & le plus gracieux de tous les angles. Que l'on fasse une table ou un quadre dont les angles soient aigus & obtus, les enfans, comme les hommes faits trouveront cette construction bisarre, incommode, de mauvais goût. La comparaison est le plus excellent moyen de former la raison des enfans; elle varie les objets, multiplie les principes d'expérience; &, ce que l'on doit beaucoup considérer, elle fournit un aliment perpétuel à l'activité de l'enfance.

doivent se couper à angles droits au point de rencontre B. Prolongez une des lignes BD à liberté vers S. Ensuite du point B & à différentes ouvertures du compas, décrivez les demi-circonférences OPT. Voyez si l'arc OP est toujours égal à l'arc PT; cela doit être, si la ligne AB est perpendiculaire sur AB; car la ligne AB ne penchant d'aucun côté, fera l'angle ABS = l'angle ABD, & par conséquent l'arc OP, qui est la mesure de l'un, doit être égal à l'arc PT, qui est la mesure de l'autre.

Il est à propos de décrire plusieurs circonférences, parce qu'une différence insensible sur une petite, devient très-apparente sur une grande.

30. Le bâton ou l'équerre d'Arpenteur représente un cercle traversé (*fig.* 36.) par deux règles immobiles AB, CD qui se coupent au centre à angles droits. Les extrémités de ces deux règles ou de ces deux diamètres portent des pinnules semblables à celles du graphomètre; elles ont le même usage quand on opère sur le terrein. Cet instrument est soutenu par un support à trois branches. Il n'y a rien de plus commode pour élever ou abaisser des perpendiculaires à toutes sortes de distances, comme on va le voir par les problêmes suivans.

PROBLÊME XI.

31. Elever une perpendiculaire sur le terrein au point C d'une longueur donnée SD (*fig.* 37.).

PREMIÈRE RÉSOLUTION.

Prenez avec une corde les deux distances CB, CD égales entr'elles. Aux points B, D plantez deux piquets. Attachez à ces deux piquets les deux

extrémités d'une autre corde BOD, plus longue que la distance BD des piquets, & dont on ait marqué bien exactement le milieu O. Tendez la corde par ce milieu, jusqu'à ce que vous sentiez que les deux moitiés BO, OD résistent également. Plantez un piquet au point O. Je dis que les deux points O, C, seront dans une perpendiculaire sur la ligne SD. C'est la même démonstration qu'au Problême 8 (n°. *26.*).

On pourra prolonger cette perpendiculaire CO suivant le besoin, comme on l'a enseigné, n°. 7.

SECONDE RÉSOLUTION.

32. Vous pouvez élever une perpendiculaire sur le point S de la ligne AB (*fig.* 38.) avec l'équerre d'Arpenteur

Disposez cette équerre de maniere que son centre réponde bien verticalement (*a*) sur le point S, alignez un des diamètres de l'instrument aux deux piquets A, *t*, plantés sur la ligne AB. Arrêtez l'instrument dans cette situation. Allez ensuite regarder le long de l'autre diamètre CD par les pinnules qui sont à ses extrémités, & faites planter un piquet P dans l'alignement CD. La ligne PS sera perpendiculaire à la ligne AB, par la constrúction de l'équerre d'Arpenteur, dont les deux diamètres se coupent à angles droits.

33. Si vous vous défiez de la justesse de votre instrument, mettez le diamètre MN dans la direction SP; alors DC doit se trouver dans la direction de la ligne AB, c'est-à-dire, que si vous n'ap-

(*a*) *Verticalement*, c'est-à-dire, qui tombe bien perpendiculairement de haut en bas, comme feroit une balle de plomb suspendue librement à une corde.

percevez pas les piquets A, *t*, en regardant les pinnules D, C, l'équerre d'Arpenteur est mal construite.

PROBLÊME XII.

34. Comme le point O, d'où l'on se propose de tracer une perpendiculaire sur le terrein, peut être hors de la ligne BD (*fig.* 37.), si la distance n'est pas considérable, on prendra une corde BOD, dont on marquera le milieu O, que l'on arrêtera au point O par le moyen du piquet OS. On tendra les moitiés OB, OD de la corde, jusqu'à ce que les deux extrémités B, D de cette corde rasent la ligne SD aux points B, D, où l'on plantera des piquets. On mesurera ensuite avec une autre corde la distance de B en D, dont on prendra le milieu C, en pliant la corde en deux parties égales que l'on portera de B ou de D en C. Comme on aura alors les deux points O, C chacun à égale distance de B & de D; la ligne OC qui passera par ces deux points, ne penchera d'aucun côté, & sera par conséquent perpendiculaire à la ligne SD.

Ou bien, quand la distance sera trop grande, on se servira de l'équerre d'Arpenteur, & l'on commencera par planter un piquet au point P (*fig.* 38.) d'où l'on veut abaisser une perpendiculaire sur la ligne A B. On fera courir ensuite l'équerre d'Arpenteur sur la ligne AB, jusqu'à ce que l'un de ses diamètres M N répondant bien éxactement à la ligne AB, l'on apperçoive le piquet P par les pinnules de l'autre diamètre C D. Au point S, où l'on aura fait cette observation, on plantera un piquet. Entre les points P, S on plantera d'autres piquets qui traceront la perpendiculaire PS; ce qui est démontré par la seule position de l'instrument.

L'art de tracer une perpendiculaire sur le papier, donne aussi le moyen de diviser une ligne en deux parties égales.

PROBLÊME XIII.

35. Trouver le milieu C d'une ligne AB tracée sur le papier (*fig.* 39.).

RÉSOLUTION.

On trouve le milieu C d'une ligne AB sur le papier, en posant une des pointes du compas sur l'une des extrémités A : on donne au compas une ouverture plus grande que la moitié de la ligne AB, & de ce point l'on décrit deux arcs, l'un au-dessus & l'autre au-dessous de la ligne AB. Avec cette même ouverture de compas on fait une semblable opération au point B ; ce qui donne les deux points d'intersection *r*, *s*, par lesquels tirant *r s*, non-seulement cette ligne *r s* est perpendiculaire sur la ligne AB, mais elle la coupe en deux parties égales au point C.

DÉMONSTRATION.

Que l'on se rappelle que deux points déterminent une ligne droite. Par la construction les points *r*, *s* de la ligne *r s* sont éloignés de A autant qu'ils le sont de B ; ainsi la ligne *r s* pendant tout son cours ne s'approche pas plus de l'extrémité A que de l'extrémité B ; elle passe donc par le milieu, C. Q. F. D. (*a*)

Vous prendrez sur le terrein le milieu de la ligne

(*a*) Ces quatre lettres C. Q. F. D. signifient ce qu'il falloit démontrer.

AB (*fig.* 40.) en étendant une corde sur cette ligne, quand elle ne sera pas trop longue; on pliera la corde en deux parties égales, & l'on en portera la moitié depuis une extrémité A jusqu'au point O où elle se terminera sur la ligne AB: ce point O en sera le milieu.

Mais la longueur de la ligne AB peut être si considérable que les plus longues cordes n'y suffiroient pas; on prendra donc la valeur de cette ligne en toises, pieds, pouces, &c. ou en d'autres longueurs dont on conviendra: la moitié du nombre de ces longueurs, portée sur la ligne proposée, on déterminera le milieu.

Ou bien, ce qui sera plus court, on tendra une corde sur la ligne AB autant de fois qu'il en sera besoin, pour avoir à peu près la moitié de cette ligne. On tendra, par exemple, cette corde de A en R, de R en C, de C en D, de D en G qui approche d'être la moitié de la ligne AB. On ira ensuite à l'autre extrémité B, où l'on tendra la corde quatre fois depuis B jusqu'en M, comme l'on a fait depuis A jusqu'en G: après quoi on aura facilement le milieu O de la petite longueur GM en pliant en deux parties égales la corde qui servira à la mesurer: il est clair que le milieu de l'étendue GM sera aussi celui de la ligne AB.

Cette manière d'avoir le milieu d'une ligne fort étendue sur le terrein, est aussi fort commode sur le papier, lorsque l'on n'a pas un compas assez grand.

Quand le point G passeroit le milieu de la ligne AB, de même que le point M, il ne faudroit pas s'en embarrasser; on aura toujours le milieu de la ligne AB, en prenant la moitié de la distance qui se trouvera entre les deux dernières portées. L'opération porte avec elle sa démonstration.

On détermine aussi la moitié d'un angle sur le papier de la même maniere à peu près que l'on coupe une ligne droite en deux parties égales. On fera simplement réfléxion que, les arcs étant la mesure naturelle des angles, couper un angle en deux parties égales, c'est la même chose que de couper par le milieu l'arc, qui est la mesure de cet angle.

PROBLÊME XIV.

36. Déterminer la moitié de l'angle BAC sur le papier (*fig*. 41.).

RÉSOLUTION.

Du sommet A décrivez l'arc BC d'une ouverture de compas à volonté : vous avez par là le point A de la ligne AD, éloigné de B autant qu'il l'est de C. De ces points B, C, & d'une ouverture de compas, plus grande que la moitié de la longueur BC, décrivez deux arcs qui s'entrecoupent au point D; cet autre point D de la ligne AD est à égale distance des points B, C. La ligne AD passe donc par le milieu de l'arc BC; elle coupe par conséquent en deux parties égales l'angle dont cet arc est la mesure.

Cette opération est tout aussi simple sur le terrein que sur le papier; car après avoir connu, par le moyen du graphomètre, (n°. 24.) la valeur en degrés de l'angle BAC, la moitié du nombre de ces degrés déterminera sur le graphomètre la moitié de l'angle BAC. Plaçant donc l'alidade de l'instrument au nombre qui désignera cette moitié, on fera planter des piquets dans l'alignement de l'alidade, & l'on aura une ligne sur le terrein, qui coupera en deux parties égales l'angle BAC proposé.

La perpendiculaire, qui donne des angles droits, qui sert à diviser une ligne & un angle en deux parties égales, a encore une autre propriété qui mérite d'être remarquée.

37. Du point A au côté BC de la muraille M (*fig.* 42.) il y a bien des chemins. On peut y aller en suivant les routes AB, AN, AS, AT, AC, &c. qui sont toutes des lignes droites : mais celui qui du point A regardant la muraille BC en face, prendroit les routes AC, AB, n'arriveroit pas sur le côté BC par le plus court chemin. On sent qu'en marchant directement devant soi sur la ligne AS, qui ne se détourne ni à droite ni à gauche, on suivroit la voie la plus naturelle. Or une ligne qui tend vers une autre sans s'incliner d'aucun côté, est une ligne perpendiculaire. Ainsi une ligne AS, menée perpendiculairement du point A au côté BC, détermine le plus court chemin qu'il y ait d'un point à une ligne.

La perpendiculaire AS est donc la véritable distance ou la distance naturelle du point A à la ligne BC, (*fig.* 42.) & il ne peut pas y en avoir une autre aussi courte ; car pour peu que l'on s'en écarte, on prendra sur la droite ou sur la gauche, & l'on ne marchera point directement en face de la ligne BC (*a*).

(*a*) Les Commençans sont portés à rappeler les perpendiculaires simplement des lignes droites, comme si les obliques n'étoient pas aussi des droites. Afin donc que les jeunes gens prennent de la perpendiculaire une idée qui la caractérise bien particulièrement, on doit leur faire observer qu'elle n'est pas ainsi appelée, parce qu'elle est droite, mais parce qu'elle a la propriété de ne s'incliner d'aucun côté. De même, les lignes ponctuées AB, AC, ne cessent pas d'être droites, à cause qu'elles sont inclinées ; on leur donne le nom d'obliques ; pour exprimer la propriété qu'elles ont de pencher. Les Maitres doivent aussi être attentifs à faire remarquer la différence qu'il y a entre une perpendiculaire & une verticale ou une ligne à plomb. Une ligne peut être perpendiculaire, sans être verticale ; pour qu'elle ait cette propriété, il suffit qu'elle rencontre une autre ligne à angles droits, au lieu qu'une verticale est une ligne qui

Toutes ces pratiques, dont la ſuite fera encore mieux connoître l'utilité, ſont uniquement fondées ſur la ſimple conſidération d'une ligne droite qui en rencontre une autre. Nous allons continuer nos obſervations ſur le même objet ; elles nous fourniront un principe très-fécond, avec lequel nous démontrerons dans le Chapitre ſuivant tout ce que la Géométrie renferme de plus eſſentiel.

39. On a pu remarquer, en voyant l'équerre d'Arpenteur, que deux lignes qui s'entrecoupent, forment quatre angles, deux au-deſſus & deux au-deſſous de la ligne AB (*fig.* 36.). Que la ligne CD, tombant perpendiculairement ſur la ligne AB, donne quatre angles droits, dont la circonférence entière eſt la vrai meſure : ainſi la demi-circonférence eſt la meſure de deux angles droits, comme il eſt évident dans cette figure où les angles *r*, *s* ſont droits.

Mais ſoit que la ligne CD tombe perpendiculairement ſur AB, ſoit qu'elle lui ſoit oblique (*fig.* 43.), les deux angles *r*, *s*, pris enſemble du même côté de la ligne AB, valent toujours la ſomme de deux angles droits, puiſqu'ils ſont meſurés par une demi-circonférence.

Il y a plus, tous les angles *r*, *s*, *t*, *x*, *y* (*fig.* 44.) que l'on peut former autour du même point D du même côté de la ligne AB, pris enſemble, ne valent que deux angles droits ; ce que la figure démontre ſuffiſamment.

40. Puiſque la circonférence d'un cercle quelconque contient 360 degrés ; la demi-circonférence ou la meſure de deux angles droits = 180 degrés,

tombe perpendiculairement de haut en bas, comme qui diroit du ſommet de la tête aux pieds. Un arbre, les édifices s'élevent verticalement ſur la ſurface de la terre ; mais le côté d'une table eſt perpendiculaire à celui qu'il rencontre, & il n'eſt pas vertical.

moitié de 360; & l'angle droit = 90 degrés, moitié de 180 degrés. L'angle obtus, qui est plus grand qu'un *droit*, peut donc croître depuis 90 degrés jusqu'à 180 degrés; & l'angle aigu, qui est plus petit qu'un droit, peut l'être depuis 1 jusqu'à 90 exclusivement (*a*).

Il suit de tout ceci que connoissant en degrés l'angle *r* (*fig.* 43.), on connoîtra son angle de suite *s*, que quelques-uns appellent son *supplément* (*b*); car supposant *r* = 127 degrés, vous direz : 127 + *s* = 180 degrés; donc *s* = 180 — 127 = 53 degrés, c'est-à-dire, qu'il n'y a qu'à retrancher l'angle connu *r* = 127 de 180 degrés, l'on aura 53 degrés pour la valeur de l'angle *s*.

C'est par ce même moyen que l'on peut résoudre le problême suivant.

PROBLÊME XV.

41. Deux murailles se rencontrent au point C (*fig.* 42.). On voudroit savoir la valeur de l'angle BCM, sans entrer dedans.

RÉSOLUTION.

Appliquez sur la muraille BC une règle qui s'étende vers D; il naîtra au point C un angle MCD au dehors, dans lequel on peut entrer. Mesurez cet angle, que je suppose de 58 degrés, & retranchez cette valeur de 180 degrés; vous aurez 122 pour la valeur de l'angle BCM, au-dedans duquel il n'est pas possible d'opérer.

Comme la vérité, qui a servi à la résolution de

(*a*) Cela se démontre aux yeux avec les branches d'un compas; on peut d'abord les disposer à angles droits; & les ouvrant ensuite ou les fermant, on verra jusqu'où l'angle obtus peut croître, & jusqu où l'angle aigu peut décroître.

(*b*) On appelle *Supplément* d'un angle, ce qu'il faut lui ajouter pour valoir deux angles droits.

ce Problême, va être la source d'où découlent les vérités suivantes; afin qu'on se la grave bien dans la mémoire, nous en ferons notre proposition premiere.

PROPOSITION I. (a)

42. Une ligne droite CD (*fig.* 43.) qui rencontre une autre ligne droite AB, forme au point de rencontre D deux angles *s*, *r*, lesquels pris ensemble, valent la somme de deux angles droits.

DÉMONSTRATION.

Du point D décrivez une demi-circonférence; elle est la mesure des deux angles *r*, *s*; mais une demi-circonférence est aussi la mesure de deux angles droits; les deux angles *s*, *r*, pris ensemble, valent donc deux angles droits.

COROLLAIRE. (*b*)

Il est clair par cette proposition que l'un des deux angles étant droit, l'autre le sera aussi; mais si l'un est aigu ou plus petit qu'un droit, l'autre sera obtus ou plus grand qu'un droit; par la raison que le défaut de l'un doit être compensé par l'excès de l'autre.

43. Prenons maintenant la conclusion de la Proposition première, comme une chose connue ou accordée; & voyons si on pourroit en déduire le principe, c'est-à-dire, supposons qu'à la rencontre D

(*a*) *Proposition*. C'est un discours par lequel on énonce une vérité démontrée, ou que l'on se propose de démontrer.

(*b*) *Corollaire*. C'est une conséquence qui se déduit immédiatement d'une proposition, mais qui ne fait pas chaîne avec les propositions. Voyez plus particulièrement (n°. 71, note *a*) ce que c'est qu'un Corollaire.

des deux lignes AB, CD, il se forme deux angles ADC, CDB (*fig.* 45.), lesquels pris ensemble valent deux angles droits, & de cette supposition essayons de conclure que la ligne ADB est nécessairement une ligne droite.

Je dis donc que la ligne ADB, qui fait au point D les deux angles ADC, CDB égaux ensemble à la somme de deux angles droits par sa rencontre avec la droite CD, est nécessairement une ligne droite.

DÉMONSTRATION.

La démonstration de cette vérité est fondée sur la Proposition première & sur les Axiômes suivans.

PREMIER AXIOME.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties; ou, ce qui est la même chose, il est impossible qu'une partie soit égale au tout dont elle est partie.

SECOND AXIOME.

Une chose possible est réelle, quand on ne sauroit la nier sans tomber dans une contradiction.

TROISIÈME AXIOME.

Deux grandeurs egales à une même troisième, sont égales entr'elles.

QUATRIÈME AXIOME.

Si de grandeurs égales on retranche la même grandeur ou des grandeurs égales, les restes seront égaux.

Supposons

Supposons donc que DB ne soit pas dans une même ligne droite avec AD, quoiqu'il soit accordé que les deux angles ADC, CDB pris ensemble valent deux angles droits (*a*); il est très-possible de prolonger AD en ligne droite, dont le prolongement ira, si l'on veut, vers S au-dessus ou au-dessous de DB. Dans ce cas, puisque ADS est une ligne droite, les deux angles ADC, CDS $= 2r$ (n°. 42.); mais, par la supposition, les deux angles ADC, CDB $= 2r$: par conséquent (Axiôme 3.) ADC + CDS = ADC + CDB: Otant de part & d'autre l'angle commun ADC, on aura (Axiôme 4.) l'angle CDS = l'angle CDB; ce qui est impossible (Axiôme 1.); il est donc aussi impossible que la ligne ADB ne soit pas une ligne droite, puisqu'on ne sçauroit le nier, sans tomber dans une contradiction.

44. Quand on met en supposition une vérité, que l'on vient de démontrer, pour en déduire le principe qui a servi à sa démonstration, c'est-à-dire, que la conclusion devient principe & le principe conclusion; la proposition qui exprime cela, s'appelle l'*inverse* ou la *converse* de celle qui la précède; ainsi la proposition que nous venons de démontrer, est la converse de la première Proposition (*b*).

(*a*) La valeur de deux angles droits sera dorénavant exprimée par $2r$, afin d'abréger le discours.

(*b*) Plusieurs d'entre les Modernes qui nous ont donné des élémens, ont extrêmement négligé la Démonstration des propositions inverses. Il y en a même quelques-uns qui ont demandé qu'on leur accordât la vérité de ces propositions, comme une chose évidente d'elle même, ou tout au moins comme une chose qui est généralement vraie.

Cette prétention ne rend coupable que de trois fautes capitales. La première consiste à n'avoir pas remarqué qu'il y a des inverses absolument fausses. Nous le ferons voir en tems & lieu. On se convaincra de la seconde, si l'on fait réflexion qu'il ne suffit pas à une proposition d'être vraie pour être reçue, il faut encore qu'elle soit démontrée; autrement il seroit libre de supprimer toutes les

Faisons présentement croiser les deux lignes AC, DB au point O (*fig. 46*). Les angles AOD, COB sont dits *opposés au sommet* aussi-bien que les angles AOB, DOC. Nous allons démontrer qu'il y a égalité entre ces angles pris deux à deux, c'est-à-dire, que AOD = COB & AOB = DOC.

PROPOSITION II.

45. Les angles AOD, COB opposés par le sommet, qui sont formés par le croisement des deux lignes droites AC, DB, sont égaux. Les angles DOC, AOB le sont aussi.

DÉMONSTRATION.

Que l'on se rappelle la proposition première, (n°. 42) on verra que $AOD + DOC = 2r$, & que $DOC + COB = 2r$: mais deux quantités égales à une même quantité sont égales entr'elles; par conséquent $AOD + DOC = DOC + COB$; ôtons la quantité commune DOC; il restera l'angle AOD = l'angle COB. C. Q. F. 1°. D.

Appliquez le même raisonnement aux deux an-

démonstrations en Géométrie. La troisième faute, qui nous paroît être la source des deux premières, est que ces Modernes ont abandonné la partie la plus épineuse de leur ouvrage. On doit leur rendre la justice qu'ils se sont assez bien acquittés de la moitié la plus aisée; mais les Géomètres, qui ne se sauvent de l'illusion des sens que par la sévérité de leurs démonstrations, ne sçauroient souffrir que l'on traite indifféremment tout ce qu'il y a de plus sérieux en Géométrie : or c'est la démonstration des inverses qui cause le plus d'embarras. J'en fais juges tous ceux qui ont un peu travaillé de tête sur la Géométrie; c'est pourquoi on ne parlera point de ces propositions aux enfans, à moins qu'elles ne soient fort simples on leur supposera comme vraies celles d'entre elles qui ont cet avantage, afin de résoudre les problêmes qui en dépendent; car il est assez remarquable que la solution d'un grand nombre de problêmes géométriques est presque toute fondée sur la vérité des propositions inverses.

gles DOC, AOB, vous aurez (nº. 41.) DOC + COB = 2 r. De même AOB + COB = 2 r. Donc DOC + COB = AOB + COB : ôtons l'angle commun COB, on aura l'angle DOC = l'angle AOB. C. Q. F. 2º. D. (a).

Mais l'inverse de cette proposition est-elle vraie? C'est à-dire, lorsque deux angles, dont le sommet est au même point D, sont égaux, ces deux angles sont-ils nécessairement opposés par le sommet & formés par le croisement de deux lignes droites?

Il est clair que les deux angles *r*, *y* (*fig.* 44.) peuvent être égaux, quoiqu'ils ne soient pas opposés par le sommet, ni formés par le croisement de deux lignes droites. Ainsi la converse de la proposition seconde est fausse.

46. Le Problême XV. (nº. 41.) que nous avons résolu par la proposition première, peut aussi se résoudre par cette proposition seconde. On se servira du *récipiangle*; c'est un instrument (*fig.* 47.) composé de deux règles GS, MN, qui se croisent au point O, où elles sont attachées par un *axe* (*b*), autour duquel elles peuvent tourner librement. Une des branches OS de cet instrument porte un demi-

(*a*) Comme nous écrivons pour ceux qui doivent enseigner, nous ne négligeons pas les démonstrations régulières, nous réservant d'indiquer dans des notes les preuves oculaires ou de sentiment dont on doit faire usage, surtout à l'égard des enfans, qu'il faut accoutumer au raisonnement par les voies les plus frappantes.

On décrira donc un cercle du point O, & on leur fera mesurer les arcs AD, BC opposés : ils les trouveront égaux, & par-là ils jugeront de l'égalité des angles dont ces arcs sont la mesure.

On peut encore leur faire sentir cette vérité, en faisant tourner une régle mobile DB autour du centre O d'un cercle où les degrés soient écrits, en couchant la règle mobile DB sur le diamètre fixe AC : si-tôt que l'on fera mouvoir cette règle, ils verront qu'il se produira au-dessous de AC précisément la même chose qu'au-dessus. Il est aussi à propos de leur faire compter les degrés compris entre les angles que l'on assure être égaux.

(*b*) *Axe.* C'est un essieu, ou une petite cheville, autour de laquelle peuvent tourner les deux règles qu'on assemble.

cercle divisé en ses degrés. Ce demi-cercle coule librement dans une fente faite à une des branches O N de l'autre règle M N; ensorte qu'en ouvrant plus ou moins les règles d'un côté, on trouve de l'autre plus ou moins de degrés renfermés entre elles.

Ajustez donc le récipiangle (*a*) à l'angle O de la

(*a*) *Récipiangle.* Ce mot est composé de deux mots latins, *recipere*, recevoir, *angulus*, angle, d'où l'on a composé *Récipiangle*, c'est-à-dire instrument qui reçoit un angle. Avant d'opérer sur le terrein, ou de prendre l'angle d'un appartement, on expliquera la structure de cette machine, le récipiangle en main. Les enfans ou les jeunes gens qui apprennent les Mathématiques, doivent être fournis de tous les instrumens dont nous avons parlé jusqu'à-présent. A l'exception de l'astrolabe ou du graphomètre simple, qui vaut à peu près 50 livres, la règle, le compas, le rapporteur, l'équerre, la chaîne divisée en toises, pieds, pouces, &c. les piquets, le cordeau, l'équerre d'arpenteur, le récipiangle, tous ces instrumens sont à très-bon marché. Je ne sçaurois trop recommander que l'on mette très-souvent ces instrumens entre les mains des enfans; le continuel usage qu'ils en feront leur donnera beaucoup d'adresse, parce que l'on aura occasion de leur faire remarquer les négligences qu'ils pourroient y commettre, & je ne sçais combien de petites attentions, d'où dépend toute la justesse d'une opération.

Ce que je dis ici doit être très-sérieusement considéré à l'égard des enfans ou des jeunes gens destinés à l'état militaire. On n'a pas toujours des Ingénieurs avec soi: la tête leur tourne quelquefois sous le feu de l'ennemi, ils peuvent être tués ou blessés; néanmoins le tems presse, il faut se loger ou être passé par les armes. C'est alors qu'un officier instruit montrera avec distinction son sçavoir faire. Prévenu des endroits d'où peut venir le feu de l'ennemi, ou le découvrant assez facilement par son habitude à l'application, il donnera à son logement une direction sure: il sera redevable à ses lumières de la conservation de sa vie, & de celle des soldats qu'il avoit sous ses ordres.

Que l'on prenne bien garde à ce que je vais dire: la Théorie n'est qu'une pratique anticipée: c'est une connoissance réfléchie de ce que les gens sensés de notre métier ont fait avant nous, ou de ce qu'ils auroient pu faire dans des cas pareils à ceux où nous sommes, & à ceux où nous pouvons nous trouver. Je n'ai que faire de prouver aux personnes éclairées ce que je viens d'avancer: pour celles qui n'ont de foi qu'à l'expérience actuelle, je les appelle à l'expérience même. Alexandre étoit fort éclairé, César l'étoit encore plus, & Lucullus, au sortir de son cabinet, bat Mithridate qui avoit vieilli sous les armes.

Présentez à l'exécution un homme déjà préparé par une bonne Théorie: je conviens qu'il ressemblera d'abord à ceux qui n'ont jamais mis la main à l'œuvre; mais quand il aura eu le tems de se reconnoître, un coup d'œil lui tracera dans le même tableau tout ce que l'on fait & tout ce que l'on doit faire. Celui qui ne roule que

muraille, de manière que ses deux bras MO, GO embrassent bien exactement les deux faces, & comptez les degrés qui se trouvent entre les deux autres bras OS, ON; ce sera la valeur de l'angle GOM que forment les deux murailles, puisque les angles opposés au sommet sont égaux.

Quand on veut mesurer une ligne droite, il n'est pas toujours possible d'appliquer une mesure dessus. La ligne AB (*fig.* 48.) peut représenter la longueur d'un marais, d'un étang, d'un lac (*a*), d'un endroit enfin si couvert, qu'il n'est pas possible d'en parcourir l'intérieur; cependant pourvu que la longueur AB soit accessible par ses extrémités A, B, on pourra la mesurer, en faisant usage de la proposition seconde où l'égalité des angles opposés au sommet est démontrée.

PROBLÊME XVI.

47. Déterminer la longueur de la ligne AB qui n'est accessible que par ses extrémités A, B (*fig.* 48).

dans le cercle étroit de son expérience, voit peut-être ce qui se passe à son poste, au-delà c'est un nuage; mais un homme rempli de connoissance est, pour ainsi dire, à tous les postes; il n'est nouveau nulle part: vous le changez de situation; il a dans sa tête un instrument qui va à tout: il prendra sa résolution des circonstances mêmes. L'art de penser ressemble à tous les Arts, c'est un métier. On ne trouve pas de grandes difficultés à faire sur le champ une chose que l'on a déja faite.

(*a*) Il arrive fort souvent que les enfans n'ont aucune idée d'un marais, d'un étang, d'un lac: il faut leur en faire voir, si l'on est à portée, ou y suppléer par une bonne explication.

Un Marais est une étendue de terre humide, bourbeux, couvert d'eaux croupissantes, parce qu'elles n'ont point assez de pente pour s'écouler.

L'Etang est un lieu bas, fermé par une élévation de terre tout autour où l'on conserve de l'eau douce, pour nourrir du poisson.

Un Lac est un grand amas d'eaux douces, fournies ordinairement par les montagnes qui l'environnent.

RÉSOLUTION.

Choisissez un point O, d'où vous puissiez aller aux extrémités A, B, en marchant sur les lignes O A, O B que vous mesurerez; vous prolongerez ensuite A O jusqu'en un point D, tel que O D = A O. Vous ferez aussi le prolongement O C = B O; appliquant enfin une mesure sur C D, qui marque la distance des points C, D, vous trouverez par-là la longueur de la ligne A B; car C D = A B, ainsi que nous allons le démontrer.

DÉMONSTRATION.

L'angle A O B = l'angle C O D qui lui est opposé au sommet (n°. 45.) & (par la construction) A O = O D & B O = O C; l'angle C O D n'a donc rien par où il diffère de l'angle A O B; par conséquent la distance C D des extrémités C, D est égale à la distance A B des extrémités A, B. C. Q. F D.

On appelle *base d'un angle* le côté opposé à cet angle : ainsi le côté C D est la base de l'angle C O D.

COROLLAIRE.

48. Concluez donc de la démonstration du problême précédent que deux angles égaux, dont les côtés sont aussi égaux, chacun à chacun, ont nécessairement des bases égales.

Nous venons de voir tout ce que l'on peut tirer à peu près de la considération de deux lignes droites qui se rencontrent. Celles qui ne sont pas déterminées à se rencontrer, comme les lignes A B, C D,

(*fig. 49.*) ne fourniſſent guères plus de propriétés qu'une ſeule ligne droite A B. La ligne C D, qui a la même tendance que A B, n'en eſt, pour ainſi dire, que la répétition ; on remarque ſeulement que l'eſpace *s x*, renfermé entre ces lignes, pourroit être uniforme : faiſant enſuite réflexion que ces lignes n'ont aucune tendance l'une vers l'autre, on concevra qu'elles ne s'approchent pas davantage du côté de *s* que du côté de *x*. Deux lignes ainſi diſpoſées ſur un plan, s'appellent *parallèles*.

Si l'on revient ſur ce qu'on a déjà vu, & que l'on faſſe attention à ce qui va ſuivre, on remarquera que tout s'exécute en Géométrie avec des lignes, des angles, des cercles, des parallèles ; ſoit qu'il s'agiſſe de démontrer des vérités découvertes, ou d'en trouver qui ne le ſont pas ; ſoit que l'on ait beſoin de les réduire en pratique, pour mettre dans la vie plus de douceurs & de commodités.

Les premières vérités de la Géométrie ſont ſi ſimples, qu'elles ne paroiſſent d'abord mériter aucuns droits ſur l'attention des hommes. Un trait, une encoignure, un rond, ſemblent n'être que des jeux de l'enfance ; mais ces jeux vont devenir la baſe des objets les plus importans ; car ailleurs, comme en Géométrie, le tout ſe réduit à bien prendre ſes meſures, ainſi que l'on va s'en convaincre dans le chapitre ſuivant.



CHAPITRE IV.

De deux lignes droites combinées avec une troisième ligne droite. Propriétés très-simples. Effets merveilleux qui en résultent.

49. POussons donc plus loin les combinaisons ; remontons à la génération des parallèles ; supposons que la ligne EF soit coupée par les lignes AB, CD (*fig. 50.*) avec la même inclinaison. Ce qu'il est très-facile d'exécuter, en faisant l'angle *b* égal à l'angle *f* (nº. 18). Ces deux lignes AB, CD également inclinées sur la ligne EF, nommée *sécante*, nous offrent huit angles ; quatre au-dehors ou *extérieurs*, quatre au-dedans appellés *intérieurs* ou internes. Les extérieurs sont *a*, *b*, *s*, *x*, & les internes sont *c*, *d*, *f*, *g*.

Deux angles tels que *c*, *f*, l'un pris en haut d'un côté de la sécante, & l'autre en bas de l'autre côté de la même sécante, au-dedans des lignes AB, CD, sont appellés *alternes internes*. Les deux angles *d*, *g* sont des *alternes internes*. C'est la même chose par rapport aux angles extérieurs : *a* est *l'alterne extérieur* de *x*, de même que l'angle *b* est *l'alterne extérieur* de *s*.

Nous allons faire voir qu'il y a égalité entre ces angles alternes pris deux à deux.

PROPOSITION III.

50. Les angles *c*, *f* alternes internes sont égaux. Il faut prouver que $c = f$, ou que $d = g$. Pour cela on doit se rappeller la Proposition seconde : (*fig. 50*).

DÉMONSTRATION.

Par la disposition des lignes A B, C D sur la sécante E F, $f=b$; mais $b=c$ (n°. 45), ainsi $c=f$.

Faites le même raisonnement par rapport aux angles d, g. Vous avez, par la construction, $g=a$. Or $a=d$, par conséquent $g=d$. C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est vraie ; c'est-à-dire, que si les augles c, f alternes internes sont égaux, les lignes A B, C D seront également inclinées sur la sécante E F.

On a donc à prouver que, si $c=f$, on aura nécessairement $b=f$, ce qui est bien évident ; car puisque l'on suppose $f=c$, & que l'on sçait (n°. 45.) que $c=b$, c'est une nécessité que $f=b$, ou que les lignes A B, C D soient également inclinées sur la sécante E F.

PROPOSITION IV.

51. Les angles b, s alternes extérieurs sont égaux.

On va démontrer que $b=s$, ou que $a=x$. On doit avoir bien présente à l'esprit la Proposition III.

DÉMONSTRATION.

$b=c$ (n°. 45.), $c=f$ (n°. 50.), $f=s$ (n°. 45.); donc $b=s$. Voici la suite de ces égalités, $b=c=f=s$; ainsi $b=s$.

De même $a=d=g=x$; par conséquent $a=x$. C. Q. F. D.

La converse est aussi très-véritable ; car si $b=s$, comme on voit que $s=f$, on aura $b=f$, c'est-à-dire, que les lignes A B, C D seront également inclinées sur la sécante E F.

PROPOSITION V.

52. Deux angles extérieurs a, s d'un même côté de la sécante, pris ensemble, valent la somme de deux angles droits.

On se propose de faire voir que $a + s = 2\,r$, ou que $b + x = 2\,r$. Avant que de procéder à la démonstration, on doit se rappeller la proposition première (n°. 42.), & la proposition quatrième.

DÉMONSTRATION.

$b + a = 2\,r$ (n°. 42.). Or $b = s$ (n°. 51.); donc $s + a = 2\,r$.

Dites encore : $b + a = 2\,r$; mais (n°. 51.) $a = x$; donc $b + x = 2\,r$. C. Q. F. D.

Mais si $b + x = 2\,r$, on en peut conclure que $b = f$, c'est-à-dire, que les lignes AB, CD sont également inclinées sur la sécante EF; ce que l'on fait voir ainsi. Par la supposition, $b + x = 2\,r$; mais (n°. 42.) $f + x =$ aussi $2\,r$. Donc $b + x = f + x$. Ainsi $b = f$. Cette conclusion est la converse de la Proposition V.

PROPOSITION VI.

53. Deux angles internes d, f, d'un même côté de la sécante EF, pris ensemble, valent aussi la somme de deux angles droits, c'est-à-dire, que $d + f = 2\,r$, ou que $c + g = 2\,r$. Que l'on se souvienne de la Proposition V.

DÉMONSTRATION.

$b + x = 2\,r$ (n°. 52.). Or $b = f$ & $x = d$

(par la supposition) ; ainsi $f + d = 2r$.

De même $a + s = 2r$; mais $a = g$ & $s = c$; donc $c + g = 2r$.

La converse de cette Proposition est aussi très-vraie, c'est-à-dire, que si $f + d = 2r$, on en peut conclure que $f = b$, ou que les lignes AB, CD sont également inclinées. Ce que je fais voir ainsi.

Par la supposition, $f + d = 2r$. Mais (n°. 42.) $b + d = 2r$. Donc $f + d = b + d$: ôtant d de part & d'autre, il ne reste que $f = b$ (a).

54. Nous avons considéré (*fig.* 51.) les lignes AB, CD coupées par la ligne EF, sans avoir égard à l'espèce des angles EOB, OSD que nous avons simplement supposés égaux (n°. 49.) : mais si les angles EOB, OSD étoient droits, les

(a) J'ai oublié de dire qu'il est très-essentiel d'écrire les équations ou les égalités, à mesure que l'esprit les découvre. On ne sçauroit croire combien un artifice aussi simple met l'intelligence à son aise. Avec cela il n'est besoin d'aucun effort de mémoire ; on a sous les yeux, pour ainsi dire, les matériaux de son raisonnement, & même le raisonnement tout entier.

J'aurois pu démontrer la proposition 6 d'une manière un peu plus simple : je conseille même qu'on la démontre aux enfans ainsi que je vais l'exposer. $b + d = 2r$; or $b = f$: donc $f + d = 2r$. De même $a + c = 2r$: mais $a = g$; donc $g + c = 2r$, ce qui est plus simple que ma démonstration. Mais je n'aurai pas à me justifier devant les bons esprits, qui sçavent qu'une démonstration exige deux conditions ; il ne suffit pas qu'elle soit simple, il faut encore qu'elle soit déduite de la proposition qui précède immédiatement ; c'est-à-dire, que la proposition précédente doit contribuer à la démonstration de la suivante. Autrement l'ordre est renversé. C'est à quoi n'ont pas assez pensé nos Modernes, qui ont écrit sur la Géométrie. Pour les anciens, quelque respectables qu'ils soient, on est forcé de les abandonner sur cet article.

Ceux qui brûlent pour eux un encens perpétuel feront

lignes B A, D C feroient toutes deux des perpendiculaires, elles n'inclineroient d'aucun côté; par conféquent elles n'auroient aucune tendance l'une vers l'autre; les lignes AB, CD feroient donc des parallèles. (n°. 48).

55. Mais, foit que les lignes AB, CD foient perpendiculaires fur EF, foit qu'elles foient inclinées deffus, pourvu qu'elles le foient également, comme nous l'avons fuppofé dans les propofitions précédentes, elles feront toujours parallèles; car fi BO prend la fituation OM, il faudra que DS, pour être également inclinée, devienne SN, en décrivant le petit arc DN égal au petit arc BM qu'aura tracé BO. Ainfi DS devenant NS fuira BO autant que celle-ci s'eft approchée, en devenant OM. Ces lignes continuant à s'incliner également fur la même ligne EF, n'auront donc jamais aucune tendance l'une vers l'autre. On peut par conféquent affurer généralement que deux lignes, qui coupent une troifième ligne avec une même inclinaifon, font parallèles entr'elles. Ainfi les propriétés que nous avons démontrées dans les Propofitions III, IV, V, VI, appartiennent à des lignes parallèles (*a*).

peut-être choqués de ma franchife; cependant, comme je n'écris pas purement une critique, je m'engage à leur donner une ample fatisfaction, quand ils voudront. En attendant, je les prie de revenir fur leur premier jugement, peut-être ne trouveront-ils pas le mien fi étrange; car fouvent le meilleur moyen de prouver une vérité, c'eft d'y faire penfer ceux qui ne la croient pas.

(*a*) Je ne crois pas devoir avertir, que l'on doit fupprimer aux enfans tous les raifonnemens qui éxigent quelque contention; ainfi les nombres 54 & 55 ne font pas faits pour eux; il fuffira de leur faire voir que deux lignes qui en coupent une troifième avec la même inclinaifon, font parallèles, c'eft-à-dire font toujours à égale diftance l'une de l'autre: comme c'eft là une vérité fort fimple, les feuls yeux en font la démonftration. Quand leur intelligence aura

PROPOSITION VII.

56. Il est aisé de s'appercevoir qu'une ligne MN (*fig.* 52.) perpendiculaire sur une des parallèles CD, le sera aussi nécessairement sur l'autre AB. Rappellons-nous la Proposition VI.

DÉMONSTRATION.

Les lignes AB, CD étant parallèles, $d + f = 2r$ (n°. 53.), mais, par la supposition, f est un angle droit, d l'est donc aussi; par conséquent MN est perpendiculaire sur AB. C. Q. F. D.

Et si l'on supposoit que MN est perpendiculaire sur AB, on en concluroit aussi facilement qu'elle est perpendiculaire sur CD. Ce qui est l'inverse de la Proposition précédente.

COROLLAIRE I.

57. Puisque les parallèles AB, CD (*fig.* 56.) n'ont aucune tendance l'une vers l'autre, il s'ensuit qu'en quelque point que l'on se mette sur l'une, on sera toujours également éloigné de l'autre. Mais nous avons vu que la perpendiculaire exprime la véritable distance qu'il y a d'un point à une ligne (n°. 37). Les perpendiculaires MN, OS, comprises entre les parallèles AB, CD, sont donc égales.

COROLLAIRE II.

58. Faisons présentement MH = OP (*fig.* 53.)

acquis quelque force, on appuyera le jugement des sens par celui de la réflexion.

Cependant on fera remarquer aux enfans, que l'Architecture & tous les Arts font un très-grand usage des parallèles. Ce sont des lignes parallèles qui forment des plattes-bandes & les allées d'un jardin. Les arbres qui forment les avenues d'une maison de campagne, sont plantés parallèlement; les portes d'un appartement, le plafond d'un salon, nos meubles les plus commodes, une glace de miroir, des carreaux de vitre, une table, un livre, un carton, tout offre aux enfans des lignes parallèles.

afin que les lignes NH, SP soient également inclinées du même côté. Dans cette supposition NH = SP; car l'angle NMH = l'angle SOP (construction) & NM = SO, MH = OP, (aussi par la construction); ainsi l'angle NMH ne diffère en rien de l'angle SOP; par conséquent NH = SP, c'est-à-dire, que les lignes parallèles ou également inclinées du même côté entre parallèles sont égales (*a*).

Mais la converse de cette Proposition est fausse, c'est-à-dire, il est faux que des lignes égales, posées entre mêmes parallèles, soient nécessairement inclinées du même côté, ou soient nécessairement parallèles.

Pour en avoir une démonstration bien sensible, prenez OG = OP, vous aurez SG = SP, qui assurément ne sont pas parallèles, quoiqu'elles soient égales & posées entre mêmes parallèles AB, CD.

59. Le Corollaire I. peut servir à la résolution du Problême XVI, c'est-à-dire, à déterminer la longueur AB d'un lac ou d'un étang que l'on ne sçauroit traverser (*fig.* 54).

On n'a qu'à élever sur les extrémités A, B les perpendiculaires égales AC, BD; en mesurant la distance CD des extrémités C, D, on aura la longueur de la ligne AB. Cela saute aux yeux.

On peut aussi faire usage de ce Corollaire pour continuer une ligne droite, lorsqu'il se rencontre quelque obstacle à son prolongement.

PROBLÊME XVII.

60. Prolonger la ligne AB malgré l'obstacle impénétrable MN (*fig.* 55).

(*a*) Comme cette vérité parle suffisamment aux yeux, il ne sera pas besoin avec les enfans de faire les frais d'une démonstration; on se contentera de leur faire construire la figure. Etant obligés par-là de la considérer quelque tems, la vérité leur restera.

RÉSOLUTION.

Quand vous ferez arrivé au point B, au-delà duquel il n'est pas possible de s'avancer, vous vous détournerez à angles droits sur BG, sur laquelle vous vous étendrez jusqu'à un point G, où faisant un autre retour à angles droits, vous puissiez marcher sur la ligne GH, qui vous dégage de l'obstacle MN. Arrivé au point H, où vous appercevrez que vous pouvez vous rapprocher de la ligne ABLS, vous ferez le retour HL, toujours à angles droits, égal au détour BG, & le point L se trouvera dans le prolongement de la ligne AB. Faisant encore un quart de conversion vers S, c'est-à dire, traçant une perpendiculaire LS, elle sera le prolongement de la ligne AB.

Une démonstration ne seroit pas plus parlante que la figure.

La Théorie (*a*) des parallèles, que nous venons d'établir, va nous servir à construire ces lignes sur le papier & sur le terrein.

(*a*) *Théorie*. C'est la connoissance des raisons par lesquelles on établit une vérité. Pour donner une bonne Théorie des parallèles, peu importe que ces lignes soient construites avec précision. On part de la supposition qu'il y ait des parallèles. De la première idée que l'on s'en forme, on essaie de déduire toutes les propriétés que l'on peut découvrir. Le sublime de la Théorie consiste à devancer l'expérience, à la guider, à la perfectionner. Mais avec les enfans, quand on aura démontré une propriété, on la confirmera toujours par l'expérience; on leur fera mesurer avec le compas, les angles alternes internes, afin qu'ils voient s'ils sont parfaitement égaux. On essayera de même si la somme des arcs, qui mesurent deux angles internes ou extérieurs pris du même côté de la sécante, est égale à une demi-circonférence qui a même rayon que ces arcs; comme ils trouveront que cela est, ils auront une preuve, tirée de l'expérience, que la somme de ces angles est toujours égale à deux angles droits.

PROBLÊME XVIII.

261. Par le point O mener une parallèle CD à la ligne AB donnée sur le papier. (*fig.* 57).

RÉSOLUTION.

Du point O tirez à volonté une ligne OS, qui coupe la ligne AB donnée au point S, pour avoir l'angle *g*, entre les côtés duquel & du point S vous décrirez l'arc OM, d'un rayon pris à discrétion. Et, comme vous êtes prévenu que les angles alternes internes doivent être égaux ; de l'autre côté de la ligne OS, faites sur cette ligne au point O l'angle *a* égal à l'angle *g*, en prenant l'arc SN égal à l'arc MO, & par les points N, O, tirez la ligne CD ; elle sera parallèle à la ligne AB.

DÉMONSTRATION.

Par la construction, les angles alternes internes sont égaux : donc les lignes AB, CD sont parallèles. (n°. 50).

On remarquera que la résolution de ce Problême est fondée sur la converse de la Proposition III. (n°. 50).

PROBLÊME XIX.

62. Tracer des parallèles sur le terrein. (*fig.* 56).

RÉSOLUTION.

On commencera par tracer une des parallèles CD. Après quoi on conviendra de la largeur ou de-

de la distance qui doit régner entre ces parallèles. Supposons que d'un point quelconque S de la ligne CD on ait élevé avec l'équerre d'Arpenteur la perpendiculaire SO (nº. 32.) d'une longueur convenue; ce qui déterminera la véritable distance que l'on veut mettre entre ces parallèles. Au point O élevez la perpendiculaire BOM; elle sera nécessairement parallèle à CD.

DÉMONSTRATION.

Car deux lignes CD, BOM, perpendiculaires sur une troisième ligne OS, sont parallèles entre elles. (nº. 54.).

Il est fort commode de sçavoir diviser une ligne droite en autant de parties égales qu'il est nécessaire. Cette opération peut se faire avec une grande facilité par le moyen des parallèles. (*fig.* 58.)

PROBLÈME XX.

63. Diviser une ligne droite AB en autant de parties égales qu'on le demande.

RÉSOLUTION.

Supposons que ce soit en six parties égales. Par l'extrémité B de la ligne AB tirez la ligne indéfinie BD, sur laquelle vous n'avez qu'à porter six fois une même ouverture de compas à discrétion. Après cela vous tracerez AD; & par les points de division 5, 4, 3, 2, 1, vous tirerez les lignes 5 C, 4 M, 3 N, 2 O, 1 P parallèles à la ligne AD; ces lignes diviseront AB en six parties égales.

Cela est assez évident; car la ligne AB traversant des parallèles, qui sont (par la construction)

à égale distance, parcourra entr'elles des espaces égaux; ainsi AC=CM=&c. (*a*)

Mais, pour abréger cette opération, il suffira de tirer la ligne 5 C parallèle à AD, & la ligne AC sera la sixième partie de AB. En portant donc cette longueur AC six fois sur AB, elle se trouvera divisée en six parties égales.

64. Jusqu'à présent nous avons supposé que les deux lignes AB, CD, combinées avec une troisième ligne EF, n'étoient pas disposées à se rencontrer. Mais ces lignes peuvent être inclinées l'une à l'autre. AB peut devenir SO (*fig. 59.*), c'est-à-dire, rencontrer CD perpendiculairement ou obliquement. Considérons ces lignes dans ce dernier état. Un nouveau point de vue nous mènera à des découvertes nouvelles.

Quoique AB soit devenue SO, laissons pourtant la trace de son parallèlisme; c'est sur lui que nous allons fonder la certitude & l'évidence des vérités suivantes.

Les trois lignes EF, FO, OE par leur nouvelle disposition forment la figure EFO, qui a trois côtés & trois angles, d'où lui est venu le nom de *triangle*. L'angle *d* est dit *extérieur à ce triangle*. C'est cet angle extérieur *d* qu'il nous importe de considérer.

PROPOSITION VIII.

65. L'angle *d*, extérieur au triangle EFO, & formé par le prolongement OD du côté FO, vaut toujours la somme des deux angles *b*, *g* intérieurs opposés de ce triangle.

(*a*) Il me semble qu'il n'est pas besoin d'une démonstration plus rigoureuse pour les enfans, principalement à l'égard d'une opération aussi sensible. On consultera le Chapitre des lignes proportionnelles si l'on n'est pas satisfait de ce que nous disons ici.

Il faut prouver que $d = b + g$ (*fig.* 59.)

Nous avons déja dit que la ligne SO pouvoit être perpendiculaire ou oblique à la ligne CD. Supposons d'abord qu'elle soit perpendiculaire, & rappelons-nous la proposition VII (nº. 56.).

DÉMONSTRATION.

Suivant la proposition VII. (nº. 56.) EO étant perpendiculaire sur l'une des parallèles CD, l'est aussi sur AB; par conséquent l'angle d, qui est droit, vaut la somme des angles a, g qui composent ensemble un angle droit : on a donc $d = a + g$; mais $a = b$ son alterne (nº. 50.), ainsi $d = b + g$.

2º. Si SO est oblique sur CD (*fig.* 60), du point E décrivez une demi-circonférence. On aura (nº. 53.) $d + c = 2r = a + g + c$. Ainsi $d + c = a + g + c$. Otant c de part & d'autre, il reste ainsi $d = a + g$. Mais $a = b$ son alterne, ainsi $d = b + g$. Il est donc généralement vrai que l'angle d, extérieur à un triangle EFO, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés b, g. (*a*)

COROLLAIRE.

D'où il suit évidemment, que l'angle extérieur d est nécessairement plus grand que l'un des deux angles b, g, intérieurs opposés.

(*a*) On a bien des mesures à prendre contre les lecteurs de mauvaise humeur. Pourquoi, diront-ils, démontrer à deux fois ce que l'on peut faire voir d'un seul coup? Nous avons plus d'un objet en écrivant. Nous ne composons pas sur la Géométrie, pour ne donner que des germes de vérités : elles ne trouveroient pas assez de fond dans les esprits auxquels nous les destinons. Telle est la nature de l'esprit humain, il ne peut s'élever aux généralités qu'en passant par les détails. D'un autre côté, si nous n'avions pas considéré la Proposition 8 dans ces deux cas différens, la proposition 7 lui devenoit totalement inutile, & l'enchaînement des vérités étoit rompu.

REMARQUE.

Pour sçavoir dans tous les cas à quels angles intérieurs l'angle extérieur *d* est égal, on ne fera point attention à son angle de suite *f*: ainsi les deux autres angles du triangle entreront nécessairement en comparaison.

66. La converse de la proposition VIII est fausse; car il n'est pas vrai qu'un angle extérieur à un triangle, quoiqu'égal à la somme de deux angles intérieurs opposés, soit nécessairement formé par le prolongement d'un côté de ce triangle (*fig. 61.*).

DÉMONSTRATION.

Faites au point O l'angle NOM = l'angle *d* = *b* + *g*; ainsi NOM = *b* + *g*. Mais l'angle NOM n'est formé par le prolongement d'aucun côté du triangle EFO; il est pourtant égal à la somme des deux angles intérieurs opposés *b*, *g* (construction). Ainsi de ce qu'un angle extérieur à un triangle vaut la somme de deux angles intérieurs opposés, on n'en sçauroit conclure absolument que cet angle soit formé par le prolongement d'un côté du triangle (*a*).

PROPOSITION IX.

67. Les trois angles *a*, *b*, *c*, d'un triangle quel-

(*a*) On me dira peut-être, que cette Proposition convertie autrement pourroit être vraie. Je ne le nie pas; mais alors on n'auroit pas la véritable converse de cette Proposition. Il n'est pas libre de convertir comme on veut. Quand on énonce une Proposition, dès-là sa converse est déterminée. Pour l'avoir, il faut supposer la conclusion vraie, & voir si on en peut déduire le principe. Il n'y a point d'autre manière de convertir véritablement une Proposition. Or c'est ce que nous avons fait ici; par conséquent ceux qui se conduiront autrement pourront donner une nouvelle proposition, mais non pas une converse.

conque EFO, pris ensemble, valent précisément la somme de deux angles droits (*fig.* 62.).

Il s'agit de démontrer que $a + b + c = 2r$.

DÉMONSTRATION.

Prolongez indéfiniment un côté quelconque FO vers D. Par la proposition VIII (nº. 65.), l'angle extérieur $d = a + b$. Ajoutant c de part & d'autre, on aura $d + c = a + b + c$. Mais (nº. 42.) $d + c = 2r$. Par conséquent $a + b + c = 2r$, c'est-à-dire, que les trois angles d'un triangle valent la somme de deux angles droits. (*a*) C. Q. F. D.

Il est très-essentiel de remarquer cette proposition. Les vérités les plus importantes de la Géométrie remontent à celle-ci, & l'on résout par son moyen des problêmes très-curieux & très-utiles.

Cette proposition n'a point de converse. Nous dirons ailleurs (nº. 177. note *a*, T. 2.) pourquoi certaines propositions ont des converses, pourquoi d'autres n'en ont pas, ce qu'on doit faire pour découvrir les converses qui sont vraies, & celles qui sont fausses.

68. Une Place de guerre est ordinairement environnée de *Bastions*. Un Bastion est une partie du rempart d'une Place. Vû de la campagne, il ressemble à la figure ABCDE (*fig.* 63.).

(*a*) On fera voir aux enfans, par des figures particulières, ce que c'est qu'*être égal à deux angles droits*. On mettra, par exemple, de suite autour d'un point les trois angles d'un triangle, & on leur fera remarquer qu'ils sont réellement mesurés par une demi-circonférence, qui est la mesure de deux angles droits. On pourra encore décrire sur une ligne une demi-circonférence, avec le rayon de laquelle on décrira des arcs du sommet de chaque angle du triangle. On portera ces trois arcs successivement & de suite sur la demi-circonférence, ils la rempliront entièrement, si l'opération est exacte. Les enfans s'amuseront beaucoup à toutes ces petites constructions, qui leur laisseront dans la tête des idées distinctes.

Les lignes AB, ED sont les *flancs* du Bastion. BC, CD en sont les *faces*. L'angle BCD s'appelle *l'angle flanqué*. L'expérience a appris qu'un angle flanqué BCD, au-dessous de soixante degrés, oppose une résistance trop foible au canon, avec lequel on bat les faces du Bastion où l'on veut faire brêche. Mais ceux qui vont reconnoître une Place, dont on se propose de faire le siége, n'en peuvent approcher que très-dangereusement. N'y auroit-il pas moyen de connoître la grandeur de l'angle BCD, sans être exposé au feu de l'ennemi, très-attentif à défendre l'approche de ses murailles, afin de cacher aux assiégeans les endroits foibles de la Place par lesquels on ne manqueroit pas de l'attaquer (*a*)?

PROBLÊME XXI.

69. Déterminer la grandeur de l'angle inaccessible BCD (*fig. 63.*).

RÉSOLUTION.

Hors de la portée du fusil (*b*) (car les coups de

(*a*) Tout ceci demanderoit une bonne explication. Nous nous bornerons à indiquer la conduite que l'on doit tenir à l'égard des enfans. On leur dira ce que c'est qu'une Place de guerre, quel est son objet. On leur fera une description de ce qu'il y a de plus essentiel à remaquer dans un siége, comme les lignes de circonvallation, les tranchées, les batteries, &c. ils se plairont beaucoup à entendre ces petites histoires; cela les disposera à recevoir la vérité géométrique, à l'occasion de laquelle ils auront appris des choses si intéressantes. Je ne cesserai de le répéter; il faut sur-tout parler aux yeux. On leur tracera une esquisse des différentes opérations d'un siége. Par-là on épargnera les mots, mais on prodiguera les idées.

(*b*) La portée du fusil chargé à balle est depuis 120 jusqu'à 140 ou 150 toises. Il y a des canons qui portent 12 à 15 cens toises; mais à cette distance il est impossible de répondre de la justesse du coup, si l'on tire sur un objet de petite étendue; parce que le boulet, vers la fin de son mouvement, est détourné de sa direction par la pesanteur qui le pousse en bas. La portée du canon en ligne sensiblement droite

canon sont trop incertains) plantez un piquet S dans l'alignement de la face BC, & un autre O dans celui de la face DC. Les trois points O, S, C, sont les sommets des trois angles du triangle OCS, dont on peut connoître les angles O, S avec le Graphomètre. On trouve, par exemple, que l'angle S = 53 degrés, & l'angle O = 37 degrés. Mais puisque les trois angles du triangle OCS valent deux angles droits, on aura $53 + 37 + g = 180$ degrés, ou $90 + g = 180$ degrés: ainsi $g = 180 - 90 = 90$ degrés, c'est-à-dire, que l'on aura la valeur de l'angle g, en retranchant la somme des deux angles O, S, de 180 degrés. Or g est opposé par le sommet à l'angle flanqué BCD; donc l'angle BCD = 90 degrés, comme l'angle g auquel il est égal (n°. 45).

Nous ne croyons pas que l'on puisse donner une résolution plus simple d'un problême qui paroît d'abord impossible à résoudre (*a*).

n'est guères que de 300 toises; c'est ce qu'on appelle sa portée *de but en blanc*; encore la force de recul dérange-t-elle beaucoup la justesse des coups; c'est pourquoi on ne tire pas ordinairement un canon pour un seul homme.

(*a*) Il n'y a rien qui tienne plus du merveilleux, que la résolution de semblables problêmes. Ceux qui ne connoissent point les secrets ni les ressources de la Géométrie, traitent les Mathématiciens de gens à imagination, quand ils leur entendent dire qu'il y a des méthodes démontrées, pour déterminer la distance entre plusieurs objets visibles, dont il n'est pas possible d'approcher. Ils prononcent tout net que la chose est impossible. Ce n'est pas qu'ils aient éxaminé la question; mais comme elle n'a rapport à aucunes de leurs connoissances, ils décident qu'elle ne tient à rien du tout. Il éxiste au fond de l'ame humaine un certain sentiment qui refuse la possibilité à tout ce qu'elle ne comprend pas. Une question qui ne donne aucune entrée à nos perceptions, nous tourmente & nous humilie. Comment regagner cette bonne opinion de notre propre excellence, qui nous remet si bien avec nous-mêmes? On taxe la question d'absurde, & l'on ne s'apperçoit pas que l'on ne fait que se venger.

C'est à l'occasion de pareilles singularités, que l'on fera comprendre aux enfans qu'ils ne sçauroient être trop retenus dans leurs décisions, & qu'on acoutumera les jeunes gens à éxaminer avant de décider. Celui qui est parvenu à l'état d'un doute raisonnable, s'est approché bien près des vérités sublimes.

Il est rare aujourd'hui que les angles flanqués d'une Place soient au-dessous de soixante degrés. On ne trouve guères ce défaut dans nos fortifications à la moderne, à moins qu'on n'y ait été forcé par la nature ou par la situation du terrein; ainsi, à ne considérer le problême 21 que du côté où nous venons de le montrer, il paroît beaucoup plus curieux qu'utile; mais la résolution de ce problême nous mène à celle d'un autre aussi singulier & d'un usage très-fréquent à la guerre.

70. Lorsque l'on établit des batteries de canon, afin de battre la face CD du Bastion ABCDE (*fig.* 63.), on doit les disposer de manière qu'elles fassent le plus grand effet possible. Il faut pour cela que les boulets frappent perpendiculairement la face CD. L'expérience apprend assez qu'un coup donné de biais ou obliquement, produit un effet beaucoup moindre que celui qui porte directement (*a*). On établit quelquefois des batteries à 300 toises de la face CD. Une distance aussi considérable ne permet pas de juger à la vue de la véritable direction des coups. La Géométrie fournit des expédiens admirables. Nous allons l'éprouver sur la question présente, qui tirera sa résolution du Problême suivant.

PROBLÊME XXII.

71. Tirer une parallèle à la face inaccessible CD du Bastion ABCDE (*fig.* 64.).

RÉSOLUTION.

Prolongez la face BC, & recherchez la valeur de l'angle flanqué C inaccessible (par le problême 21.

(*a*) Cette expérience est aisée à faire. Frappez avec un bâton sur un corps incliné, vous éprouverez beaucoup moins de résistance que si vous portiez le coup perpendiculairement. La raison en est bien simple; par cette inclinaison, le corps se dérobe en partie au coup.

n°. 69.). Au point O, où l'on a déterminé la distance à laquelle doit être la parallèle cherchée, faites avec le Graphomètre sur la ligne CO l'angle COS égal à l'angle flanqué C; la ligne OS sera parallèle à la face CD, puisque deux lignes également inclinées du même côté sur une troisième ligne, sont parallèles (n°. 55.) (*a*).

PROBLÊME XXIII.

72. Disposer des batteries de manière qu'elles produisent sur la surface CD le plus grand effet possible (*fig.* 64.).

(*a*) Etant aussi peu avancés que nous le sommes en Géométrie, nous ne croyons pas que l'on puisse donner une résolution plus élégante de ce problême. Celle que l'on trouve dans beaucoup de livres de Géométrie est trop difficile pour les Commençans, à qui d'ailleurs on ne dit pas un mot de l'esprit de la découverte, pourquoi & comment on y a été conduit. C'est une suite de propositions ou de théorèmes qui ne paroissent démontrés que pour faire preuve de la sagacité de l'esprit. Ce qui est beaucoup plus capable de faire perdre courage aux Commençans, que de les animer au travail.

Il nous a toujours paru qu'il valoit mieux, & qu'il étoit plus naturel d'exciter les hommes au travail, par l'utilité qui peut leur en revenir; il est donc à propos de leur faire envisager par quels progrès, & à quelle occasion on a pu se porter à de pareilles recherches. On n'entendra plus faire cette question si ordinaire & si raisonnable; à quoi cela mène-t-il?

A la vérité le père Dechales & Ozanam, son Traducteur, son Abbréviateur & son Commentateur, ont indiqué quelques usages des propositions qu'ils ont démontrées; mais il y a beaucoup de ces usages qui supposent des connoissances dont on n'est pas prévenu. Telle proposition, disent ces Auteurs, est d'usage dans la perspective, la Gnomonique, l'Astronomie, la Navigation, toutes sciences inconnues à ceux qui étudient les Elémens de la Géométrie. La pratique des Arts les plus communs & les plus familiers, offre un grand nombre de cas auxquels on peut appliquer la Géométrie élémentaire. Une levée de terre, un rempart, un fossé, un canon, sont des objets qui se montrent de tous les côtés. En faisant remarquer aux enfans que la Géométrie se trouve par-tout, on lui fera perdre l'injuste réputation que des esprits oisifs & superficiels s'efforcent de lui donner, d'être une science isolée qui n'entre point dans le train ordinaire de la vie, tandis qu'elle brille de toutes parts aux yeux qui sçavent l'appercevoir. En un mot nous avons une Géométrie naturelle : la réflexion l'a étendue; les découvertes ont été réduites en méthodes infaillibles; les ouvriers s'en sont mis en possession, & ils les exécutent, comme nous en jouissons, souvent sans y rien comprendre.

RÉSOLUTION.

Je ſuppoſe que le point O ſoit à une diſtance convenable de la face CD.

Tirez par ce point O la ligne OS parallèle à la face inacceſſible CD (problême 22). Sur cette parallèle élevez les perpendiculaires P, T; elles marqueront les véritables directions que l'on doit donner aux canons, afin qu'ils battent la face CD le plus avantageuſement qu'il ſoit poſſible.

DÉMONSTRATION.

PT étant, par la conſtruction, perpendiculaire ſur OS, le ſera néceſſairement ſur ſa parallèle CD (nº. 56.); par conſéquent les boulets qui ſuivront la direction PT, produiront ſur CD le plus grand effet poſſible (nº. 70.) (*a*).

Il y a plus, on peut, en ſuivant toujours la même route, découvrir la véritable longueur d'une ligne inacceſſible.

PROBLÊME XXIV.

73. Déterminer en toiſes, pieds, pouces, &c. la longueur de la ligne inacceſſible A M (*fig.* 65.

RÉSOLUTION.

On ſuppoſe qu'il ſoit libre de s'étendre dans la campagne.

(*a*) Je ſupplie que l'on ne me chicane pas. Je ſçais bien que les faces d'un Baſtion ne ſont pas tout-à-fait perpendiculaires, ou plutôt ne s'élevent pas verticalement ſur le terrein où elles ſont conſtruites, à cauſe de leur talud : par cette raiſon les boulets, qui partent de la batterie ſelon la diſpoſition que nous avons preſcrite, ne produiſent pas à la rigueur un choc perpendiculaire aux faces; mais il s'en faut ſi peu, que cela doit être compté pour rien.

Placez-vous à un point D, d'où regardant l'extrémité A de la ligne inaccessible AM, vous apperceviez dans le même alignement un point remarquable S. Il se formera au point A un angle x inaccessible, dont vous trouverez la grandeur par le problême 21 (nº. 69.). Faites ensuite au point D, sur la ligne DS, l'angle $f=x$, pour avoir la parallèle DN à la ligne inaccessible AM (nº. 55.). Etendez-vous sur cette parallèle DN jusqu'à un point N, tel qu'en faisant l'angle $g=f$, le côté NM rencontre précisément l'autre extrémité M de la ligne inaccessible AM. Après cela mesurez DN, & vous aurez la valeur de la ligne inaccessible AM.

DÉMONSTRATION.

Il n'y a rien au monde de si évident. Vous pouvez néanmoins consulter le nº. 58. où l'on a fait remarquer que deux lignes, également inclinées du même côté entre des lignes parallèles, sont nécessairement égales. Or c'est précisément la condition des lignes AM, DN; donc en mesurant l'une, on a la longueur de l'autre (*a*).

Comme nous allons parler fort souvent du trian-

(*a*) Personne, que je sache, n'avoit encore déterminé les distances inaccessibles, sans y employer les triangles semblables ou la Trigonométrie. Je parle ici aux personnes instruites. On ne pourroit pas à la vérité résoudre ce problême dans tous les cas, puisque nous supposons qu'on ait la liberté de s'étendre autant qu'il en est besoin; ce qui n'arrive pas toujours : mais ce qu'il importe de considérer, c'est l'élégance de la résolution, ce sont les moyens simples que nous y avons employés. Qu'un homme avec le sens ordinaire parvienne au bout de deux jours (il n'en faut pas davantage) à l'évidence d'une chose qu'il a crue inaccessible à l'esprit humain, qu'il a même traitée d'abord d'impossible & d'absurde, cela me semble encore plus merveilleux que la résolution du problême. Ces Institutions étant principalement destinées à cultiver l'esprit, on s'est persuadé qu'une résolution aisée à comprendre, quoique d'une pratique moins sûre, étoit préférable à des résolutions plus savantes.

gle, il est à propos d'en donner la construction; lorsque les côtés de cette figure sont donnés.

PROBLÊME XXV.

74. Construire un triangle équilatéral, c'est-à-dire, un triangle dont les trois côtés soient égaux à la ligne donnée AB (*fig. 66.*)

RÉSOLUTION.

Sur la ligne OC = AB, & de ses extrémités O, C, décrivez deux arcs qui se coupent en D, avec une ouverture de compas égale à la ligne OC ou AB. Tirez les lignes DO, DC. Le triangle DOC est équilatéral, puisque tous ses côtés sont égaux à la même ligne AB.

PROBLÊME XXVI.

75. Construire un triangle *isoscèle*, c'est-à-dire, un triangle dont deux côtés soient égaux à la ligne donnée AB, & le troisième soit égal à la ligne OC (*fig. 67.*).

RÉSOLUTION.

Faites AC = OC, & des extrémités A, C, avec une ouverture de compas égale à la ligne AB, décrivez deux arcs qui se coupent en D. Le triangle DAC sera tel qu'on le demande, puisque ses deux côtés AD, DC sont égaux chacun à la ligne AB, & que le côté AC = OC.

PROBLÊME XXVII.

76. Avec les trois lignes inégales AB, BC, CA,

construire un triangle *scalène*, c'est-à-dire, dont tous les côtés soient inégaux (*fig. 68.*).

RÉSOLUTION.

De l'extrémité O du côté OD = BC, l'une des lignes données, décrivez un arc d'une ouverture de compas égale à la ligne CA, & de l'autre extrémité D décrivez un autre arc avec la ligne AB qui coupe le premier au point S. Le triangle ODS sera celui que l'on demande.

REMARQUE.

Afin que la résolution des problêmes 26 & 27 soit possible, il est nécessaire que les deux lignes, avec lesquelles on décrit les arcs, soient plus grandes prises ensemble que la ligne dont les extrémités servent de centre à ces arcs : ainsi (Problême 26.) AD & DC ensemble doivent être plus grandes que AC, & (Problême 27) OS avec SD doit surpasser OD, sans quoi les arcs ne pourroient pas s'entrecouper.

PROPOSITION X.

77. Les trois angles du triangle BAC (*fig. 69.*) pris ensemble, sont égaux à la somme des trois angles de tout autre triangle DEF (*fig. 70.*).

Il s'agit de prouver que A + B + C = D + E + F.

DÉMONSTRATION.

Par la proposition IX (nº. 67.), A + B + C = 2 *r*; de même D + E + F = 2 *r*. Par conséquent A + B + C = D + E + F. C. Q. F. D.

Cette proposition n'a point de converse.

PROPOSITION XI.

78. Si deux angles A, B d'un triangle ABC (*fig.* 69.) sont égaux, pris ensemble, à deux angles D, E d'un autre triangle DEF (*fig.* 70.); l'on peut assurer que le troisième angle C du premier est égal au troisième angle F du second.

DÉMONSTRATION.

On vient de voir (n°. 77.) que $A + B + C = D + E + F$; ôtant de part & d'autre les grandeurs égales, c'est-à-dire ôtant $A + B$ d'une part, & de l'autre $D + E = A + B$, il reste $C = F$ (*a*).

(*a*) Ceux qui aiment la critique ne manqueront pas cette occasion de l'exercer; ils croiront me faire un reproche très-légitime, de ce que j'ai mis en proposition des vérités qu'ils regarderont comme des Corollaires fort simples.

La nature du Corollaire ne consiste pas en ce qu'il exprime une vérité qui se déduit très-naturellement d'un principe accordé ou d'une proposition établie : il y a des Corollaires, dont la démonstration est beaucoup plus difficile que celle de certaines propositions. Afin que vous ayez un caractère bien sensible, qui vous fasse distinguer une proposition d'un Corollaire, représentez-vous un systême de propositions que l'on cherche à établir, comme un terme principal auquel on est conduit par une grande route, d'où il part de tems à autre quelques chemins qui mènent à des endroits particuliers où il est quelquefois utile de se transporter.

Ainsi le Corollaire est une vérité détachée de la chaîne des propositions, dont la continuité non interrompue forme la grande route qui conduit au terme où l'on s'étoit proposé d'arriver.

On voit par cette image que toute vérité, qui fait chaîne, doit être produite sous le titre de *Proposition*, par laquelle il faut nécessairement passer; & que le *Corollaire* peut être négligé sans aucun préjudice, comme une espèce de superflu.

Ceux qui ont prétendu construire un corps de Géométrie, sans déduire, comme nous avons fait, leurs propositions immédiatement les unes des autres, peuvent mettre en Corollaire ce qu'ils appellent proposition, & en proposition ce qu'il leur plaît de nommer Corollaire : rien ne s'y oppose. Car s'ils nous disent qu'un Corollaire *est une suite ou une conséquence d'une proposition démontrée*, à l'exception des Axiômes, il n'y a rien que l'on ne doive appeller *Corollaire*, puisqu'en Géométrie les propositions, comme les Corollaires, sont des suites d'autres propositions. Ces Ecrivains mul-

La converse de cette proposition est vraie, c'est-à-dire, que si l'angle C du triangle ABC est égal à l'angle F du triangle DEF, la somme A+B des deux autres angles du premier est égale à la somme D+E des deux autres angles du second. Car puisque $A+B+C=D+E+F$, & que $C=F$, en ôtant de part & d'autre ce qui est égal, on aura $A+B=D+E$.

PROPOSITION XII.

79. Les angles B, C du triangle *isoscèle* BAC, opposés aux côtés égaux AB, AC, sont aussi égaux. (*fig.* 71).

Du point A abaissez la perpendiculaire AD, elle divisera le triangle BAC en deux triangles BAD, DAC. Il s'agit de prouver que l'angle B = l'angle C.

DÉMONSTRATION.

Une perpendiculaire, qui a un de ses points à égale distance des extrémités de la ligne sur laquelle elle tombe, ne s'approche pas plus d'une extrémité que de l'autre pendant tout son cours : or telle est la ligne AD, puisque (supposition $AB=AC$). AD passe donc par le milieu du triangle BAC : ainsi elle coupe en deux parties égales l'angle A.

tiplient donc les mots, sans multiplier les idées ; & c'est à quoi conduit ordinairement le défaut d'ordre ; parce que la place de chaque chose n'étant pas déterminée, on ne sauroit lui donner un nom qui la caractérise bien particulièrement.

Que l'on ne soit pas surpris de me voir discuter des questions qui appartiennent à la *Dialectique* ou à l'art de raisonner. Je ne pouvois pas m'en dispenser dans un Ouvrage où il s'agit de former la raison, à l'occasion d'une science qui est en quelque sorte un raisonnement perpétuel. Ce n'est en effet qu'en pensant, que l'on peut acquérir l'art de penser.

On a par conséquent $o=s$, & $f=g$, parce que ces deux angles sont droits. D'où il suit que $o+f=s+g$; ainsi (prop. 11, n°. 78.) le troisième angle B d'une part = le troisième angle C de l'autre part. C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est aussi très-véritable, c'est-à-dire, que si les angles B, C, du triangle BAC sont égaux, les côtés AB, AC opposés à ces angles sont aussi égaux (*fig.* 71.).

DÉMONSTRATION.

Sur le milieu de la ligne BC élevons la perpendiculaire DA, & considérons les deux triangles ADB, ADC. On a (supposition) B=C, & (construction) $f=g$; on a aussi DB=DC. Renversons présentement DC sur DB, le point C tombera en B, l'angle C sur l'angle B, & g sur f; le côté CA se couchera donc exactement sur BA; ces deux côtés ne feront plus qu'une seule & même ligne qui rencontrera la perpendiculaire DA au seul point A, d'où il est clair que AB=AC.

Autre Démonstration.

Voulez-vous une manière plus simple de faire sentir que AB=AC, en supposant que l'angle B= l'angle C? Considérez que la ligne AB à son origine B, est éloignée de la perpendiculaire AD autant que la ligne AC l'est à son origine C (construction). D'ailleurs l'inclinaison de ces lignes vers la perpendiculaire AD est la même (supposition); elles rencontreront donc la perpendiculaire AD au même point. En un mot AB n'est différente de AC, que parce que le point B n'est pas le point C.

COROLLAIRE

COROLLAIRE I.

80. Il n'eſt pas beſoin de démontrer que le triangle équilatéral ODC (*fig.* 66.) a ſes trois angles égaux, & que lorſque les trois angles d'un triangle ſont égaux, ſes côtés ſont auſſi égaux; puiſqu'un triangle équilatéral repréſente en tout ſens un triangle iſoſcèle.

COROLLAIRE II.

81. Il ſuffit auſſi d'avertir que les trois angles du triangle ſcalène ODS (*fig.* 68.) ſont néceſſairement inégaux. Ils ne pourroient être égaux ſans mettre de l'égalité dans les côtés (n°. 99.).

Réciproquement l'inégalité des angles d'un triangle en apporte à ſes côtés; car des côtés égaux produiſent néceſſairement des angles égaux; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

COROLLAIRE III.

82. On voit encore très-clairement que dans un triangle quelconque ABC (*fig.* S. *pl.* 6.) un plus grand côté eſt oppoſé à un plus grand angle, c'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant le côté BC plus grand que le côté AC, on aura auſſi néceſſairement l'angle BAC plus grand que l'angle ABC oppoſé au côté AC plus petit que BC.

DÉMONSTRATION.

Puiſque BC eſt plus grand que AC, prenez ſur BC la partie CD égale au côté AC, & tirez AD. Le triangle CAD eſt iſoſcèle; donc l'angle CAD eſt égal à l'angle CDA (n°. 79.); or l'angle CDA

extérieur au triangle ABD est plus grand que l'angle B (nº. 65.). Donc CAD > B ; & par conséquent BAC > CAD est aussi > B.

Réciproquement dans un triangle un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.

Soit l'angle BAC > B. Il s'agit de prouver que le côté BC > AC.

DÉMONSTRATION.

Comme on suppose l'angle BAC plus grand que l'angle B, on pourra prendre sur l'angle BAC la partie BAD égale à l'angle B ; ainsi le triangle BDA est isoscèle, c'est-à-dire, (par la converse du nº. 79.) que le côté AD est égal au côté BD ; donc BD + DC = AD + DC ; or AD + DC > AC ; donc aussi BD + DC ou BC > AC ; C. Q. F. D.

Il est quelquefois très-important à la guerre de marcher à l'ennemi, quoiqu'il soit défendu par une rivière ou un fleuve, dont il occupe une des rives, ou sur laquelle il peut se porter en très-peu de tems pour s'opposer au passage du fleuve. Quand on ne trouve pas de gués favorables, il faut jetter des ponts. La célérité de l'exécution exige qu'on n'y emploie pas plus de matériaux qu'il n'est besoin. Ce seroit une estime bien aisée à faire, si l'on sçavoit la largeur de la rivière à l'endroit où l'on veut passer ; mais l'ennemi qui occupe l'autre rive, comme nous l'avons supposé, rend la traverse bien dangereuse. Le plus sûr parti seroit de déterminer cette largeur de dessus la rive, dont on est le maître. La Géométrie va nous tirer d'embarras.

PROBLÊME XXVIII.

83. De dessus la rive CND déterminer la

largeur du fleuve RR au point P (*fig. 72.*).

RÉSOLUTION.

Tracez sur la rive CND, où vous êtes, la ligne PT indéfinie, & à peu près parallèle au cours du fleuve. Faites avec le Graphomètre un angle droit *x* sur cette ligne au point P, & remarquez sur l'autre rive un point H qui soit dans l'alignement de votre alidade. Eloignez-vous ensuite du point P sur la ligne indéfinie PT jusqu'à un point S, où posant le Graphomètre dont l'alidade doit marquer 45^d, vous puissiez appercevoir le point H dans la direction de l'alidade, tandis que le diamètre de l'instrument est aligné au point P. Je dis qu'alors, en mesurant PS, on aura la longueur de PH, d'où retranchant P*y*, il restera *y*H pour la largeur de la rivière. Il s'agit de prouver qu'en conséquence de l'opération, PS = PH.

DÉMONSTRATION.

Puisque les trois angles du triangle PSH = 180^d, valeur de deux angles droits (n°. 67.), que d'ailleurs (construction) $x = 90^d$ & $s = 45^d$, l'angle H sera nécessairement de 45^d. Ainsi l'angle H = l'angle S; mais suivant la converse de la proposition 12 (n°. 79.), lorsque les angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux. Par conséquent PS = PH, puisque ces côtés sont opposés à des angles égaux (*a*).

(*a*) Si l'on ne tombe pas d'abord au point S où le rayon SH fasse un angle de 45 *d.* avec la ligne PS, on s'éloignera ou l'on se rapprochera du point P autant qu'il en sera besoin.

Quoiqu'il y ait bien d'autres moyens de connoître cette longueur, je propose celui-ci à cause de la grande facilité de sa démonstration.

Sans chercher l'angle de 45^{d} qui oblige à tâtonner, on peut résoudre ce Problême de la manière suivante.

Autre Résolution du Problême 28. (fig. 73.)

Prenez un point P commode, & tracez, comme ci-devant, la ligne PS indéfinie, sur laquelle au point P vous formerez l'angle droit *x*, & vous ferez planter des piquets sur le prolongement de HP du côté de V indéfiniment. Marchez ensuite sur la ligne PS jusqu'à un point arbitraire T, où vous prendrez avec un Graphomètre la valeur de l'angle HTP; & à ce même point T vous ferez l'angle PTM = l'angle HTP, dont vous prolongerez le côté TM jusqu'à ce qu'il coupe la ligne PV au point M. Mesurez PM, vous aurez la valeur de PH.

Il s'agit de démontrer que l'opération donne PH = PM.

DÉMONSTRATION.

Figurez-vous que PT soit une charnière sur laquelle on fasse tourner le triangle PTH. Il est clair que l'angle *x* s'ajustera parfaitement avec l'angle *o*, puisque (construction) ces deux angles sont droits. L'angle HTP produira le même effet sur l'angle PTM = HTP. Dans cette situation HT ne sera pas différente de TM, ni HP de PM; par conséquent le point H se confondra avec le point M. Ce qui donnera PH = PM, ainsi qu'on le demandoit.

Mais, sans tant d'échafaudage, considérez que l'on a fait d'un côté sur PT précisément les mêmes opérations que l'on a exécutées de l'autre côté de cette ligne : ainsi les parties, qui ont une

même disposition, doivent être égales (*a*).

COROLLAIRE.

85. On voit, par la démonstration de ce Pro-

(*a*) On dit que l'on démontre une vérité *par le principe de la superposition*, lorsqu'on ajuste les unes sur les autres des parties supposées égales de part & d'autre, afin d'en conclure une égalité parfaite entre celles qui sont l'objet d'une proposition, dont on veut établir la certitude ou l'évidence.

Le fameux M. Arnauld, le premier en France qui ait débrouillé la Géométrie élémentaire, où il a laissé encore beaucoup de désordre, s'est élevé fortement contre le principe de la superposition : il dit (liv. 5. pag. 140 & 141.) que *c'est une preuve grossière & matérielle, & que cela est bon pour ceux qui aiment mieux se servir de leur imagination que de leur intelligence*.

Développons la nature de la démonstration ; *ce n'est autre chose qu'un raisonnement qui fait appercevoir qu'une vérité, inconnue d'abord, est nécessairement liée avec certains principes si clairs & si palpables, que les esprits les plus grossiers en soient pénétrés de lumière*. D'un autre côté il est d'une expérience constante, qu'une démonstration frappe ou éclaire l'esprit d'autant plus qu'elle fait valoir les moyens qui nous servent naturellement & sans aucune réflexion, à nous convaincre d'une vérité. Or l'unique moyen, celui auquel la nature nous pousse, quand nous voulons juger de l'égalité que l'on assure être entre deux grandeurs, c'est de les appliquer l'une à l'autre, afin de voir si leurs extrémités se confondent bien exactement. Ceux mêmes qui ont un peu étudié l'origine de nos idées Géométriques, s'appercevront facilement que l'idée d'égalité nous est venue de cette expérience. Il faut bien que les idées des corps, que les idées de la matière soient *des idées grossières & matérielles*, & que *l'on se serve de son imagination* pour les objets qui sont uniquement de son ressort.

Quand on assure que deux hommes, qui ont chacun une toise, sont d'égale grandeur, la preuve est certainement matérielle, selon M. Arnauld, puisque nous n'appercevons les grandeurs que par l'imagination. Cependant on ne conteste pas l'évidence de cette proposition : ainsi M. Arnauld ne paroît pas fondé à récuser une démonstration, parce qu'elle emploie des moyens grossiers & matériels, comme il s'exprime.

Mais nous allons plus loin. Montrons bien positivement le paralogisme de ce célèbre Ecrivain, & ce qui a pu lui faire illusion. Si quelqu'un assuroit, sans autre préliminaire, que deux quantités sont égales, & que pour en démontrer l'égalité, il posât l'une sur l'autre, la preuve seroit purement méchanique : elle est grossière & matérielle, aux termes de M. Arnauld ; il n'y a là aucun raisonnement.

Mais quand, pour démontrer cette proposition, *deux angles égaux, dont les côtés sont aussi égaux, chacun à chacun, ont nécessairement des bases égales*, je pose l'un de ces angles sur l'autre, afin d'en conclure que ces deux angles, se confondant en tout, & ne faisant plus qu'un seul & même angle, doivent avoir nécessairement une même base : ma démonstration n'est plus méchanique, car ce n'est pas afin de

blême, que deux triangles qui ont un côté égal ou commun, & sur ce côté deux angles égaux chacun à chacun; on voit, dis-je, que ces deux triangles ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire, que les côtés opposés aux angles égaux, sont égaux, ce qui est très-essentiel de retenir.

86. Le terrein pourroit se refuser à la construction du triangle PTM. En ce cas, après avoir pris la valeur de l'angle HTP, on mesurera la ligne PT, dont on écrira la mesure aussi-bien que la valeur de l'angle HTP, afin de s'en ressouvenir. On ira ensuite choisir un lieu propre à la construction d'un triangle égal au triangle HPT, c'est-à-dire, que l'on tracera sur un terrein libre (*fig.* 74.) une ligne PS = PT, sur laquelle au point P on fera un angle droit, & au point S un autre angle égal à l'angle PTH. Le point O, où se couperont les deux côtés PO, SO, déterminera la longueur de la ligne PH; puisque les côtés de ce dernier triangle seront égaux chacun à chacun, aux côtés du triangle HPT, dont la détermination est précisément la même. Par conséquent PO, opposé à l'angle S, sera égal à PH opposé à l'angle PTH = S. Ainsi la mesure de PO donnera la longueur de PH.

87. La ligne PH (*fig.* 73.) inaccessible à l'une de ses extrémités H, que nous venons de déterminer, a été supposée parallèle au plan de *l'horison* (a);

juger de l'égalité de leur grandeur, ni de celle de leurs côtés, que je les ajuste ainsi l'un sur l'autre, puisqu'au contraire je ne les ajuste ainsi que parce que je les ai supposés égaux en tout; mais je les pose de cette manière, afin que l'on s'apperçoive d'une nouvelle égalité qui est une suite nécessaire de ma première supposition, or c'est-là une démonstration en forme; & c'est à quoi il paroît que M. Arnauld n'a pas pris garde.

(a) On expliquera aux enfans ce que l'on entend par *horison*. Mais je conseille de ne leur faire cette explication que dans une belle

mais elle pourroit être élevée sur ce plan, c'est-à-dire, poser dessus perpendiculairement comme les arbres, les clochers, les pyramides, les édifices, ou s'incliner comme les murailles & les montagnes qui ont du talud. Dans ces deux cas elle peut être accessible en partie ou totalement inaccessible. Parcourons toutes ces circonstances. Les cas particuliers, en faisant naître des difficultés nouvelles, nous feront trouver de nouvelles ressources.

PROBLÊME XXIX.

88. Trouver la hauteur d'un arbre, d'un clocher ou d'une pyramide PH, qui n'est accessible que par son pied P (*fig.* 75.).

RÉSOLUTION.

Il est aisé de remarquer que toutes les plantes croissent perpendiculairement à l'horison, c'est-à-

plaine. Les yeux y sont naturellement portés à considérer ce cercle apparent qui unit le Ciel à la Terre; c'est ce que l'on appelle le cercle de l'*horison* ou simplement l'*horison*. Du point où l'on voit regner tout autour de soi cette circonférence, la Terre paroît toute plate, c'est-à-dire, uniformément étendue. Cette apparence a été nommée le *plan de l'horison*. Quand un astre, un nuage, un vaisseau paroît sortir de dessous ce plan, on dit que l'astre est à l'horison; & qu'il est sur l'horison, quand il monte au-dessus; qu'une ligne est horisontale ou parallèle à l'horison, quand elle ne s'approche pas de ce plan d'un côté plus que de l'autre. Les bras d'une balance en équilibre sont fort propres à donner l'idée d'une ligne sensiblement horisontale.

Je supplie que l'on y fasse attention. Ce sont toutes ces circonstances qui font que les enfans prennent des choses des idées bien distinctes. Les gens attentifs n'auront garde de condamner ma manière, qui consiste à décrire plutôt qu'à définir. Si je ne craignois une trop longue digression, je ferois voir qu'une bonne définition est ordinairement le résultat d'une longue expérience, & d'une combinaison très-fine d'idées fort profondes; ce qui est fort au-dessus de la portée des enfans, & même de la plûpart des hommes faits; au lieu qu'une description ressemble à un tableau qui ne demande que des yeux; mais j'y pourrai revenir ailleurs.

dire, qu'elles prennent une disposition semblable à celle d'un fil tendu par un plomb attaché à l'une de ses extrémités.

La nature apparemment a envisagé cette direction, parce qu'elle donne aux corps élevés l'assiète la plus solide. L'expérience est constante là dessus. Aussi les hommes se sont-ils conformés à cet avis de la nature dans la construction de leurs édifices: Ils ne donnent de la pente ou du talud aux pièces extérieures, qui les revêtent, que pour contrebalancer l'effort des parties qui tendent perpétuellement à s'affaisser. On peut s'en convaincre en élevant à plomb un rempart de terre. Les parties extérieures de ce rempart s'ébouleront en très-peu de tems, non-seulement à cause de la poussée des terres nouvellement remuées qui n'ont pas fait corps; mais encore par l'action continuelle de l'air, du vent & de la pluie, qui concourent sans cesse à les dégrader (a).

Puis donc que la pyramide PH est perpendiculaire à l'horison, l'angle HPS, qu'elle fait avec ce plan est un angle droit; éloignez-vous donc du pied de cette pyramide sur la ligne horisontale PS jusqu'à un point S où l'angle PSH soit de 45^d; alors l'angle SHP sera aussi de 45^d, & par conséquent PS = PH (n°. 79.); mesurez donc PS

(a) Ceux qui enseignent la Géométrie doivent sans doute la prendre pour base de leurs leçons; ils ne sçauroient pourtant s'y borner sans encourir le reproche d'oublier l'enchaînement que les différentes Sciences ont entr'elles. On l'a dit, il y a fort longtems, & cela est très-vrai, que pour bien sçavoir une chose, il falloit en sçavoir mille. Faites intervenir, si vous le pouvez, toute la nature. Montrez-la sous les aspects & par les côtés où il est facile de la saisir. Des observations physiques, faites à l'occasion d'une démonstration ou d'une vérité Géométrique, font voir ce qui a déterminé les hommes à la recherche de cette vérité; & c'est-là produire au grand jour l'esprit d'invention. Une tête remplie d'idées est encore peu de chose en comparaison de celle qui posséde l'art d'en acquérir.

qui est sur le terrein, vous aurez la hauteur P H.

DÉMONSTRATION.

Elle est précisément la même que celle du Problême 28 (nº. 83.), dont la construction ne diffère de celui-ci qu'en ce qu'il y faut prendre l'angle droit; au lieu qu'ici il est donné par la nature de la question.

Ceux qui ne s'accommoderont pas du tâtonnement auquel l'angle de 45ᵈ expose presque toujours, n'auront qu'à procéder, comme nous l'avons enseigné (nº. 84. & 86.).

On a fait observer que les murs & les remparts, que l'on élève sur le terrein, ont ordinairement du talud; ce qui fait incliner leurs faces extérieures, ainsi qu'on peut le remarquer à la ligne P H (*fig.* 76.); alors la véritable hauteur du point H au-dessus de l'horisontale S P n'est pas toute la longueur P H; c'est la perpendiculaire H D qui tombe du point H sur le prolongement P D de l'horisontale S P, parce qu'elle est le plus court chemin du point H à la ligne S D.

PROBLÊME XXX.

89. Déterminer la longueur d'une ligne P H inclinée à l'horison, & accessible par son extrémité inférieure P (*fig.* 76.).

RÉSOLUTION.

Eloignez-vous de l'extrémité P sur l'horisontale P T jusqu'en un point S, d'où appercevant le point supérieur H, vous trouviez que l'angle H S P ait entre 40 & 50 degrés. Ecrivez la mesure de cet angle; éloignez-vous encore sur l'horisontale P T jusqu'en un autre point T à 30 ou 40 toises du

point S, selon que vous le jugerez à propos; mesurez l'angle H T P, & toisez les lignes T S, S P. Cela fait, si le terrein ne vous permet pas de construire sur l'horisontale P T des triangles, dont tous les côtés soient égaux, chacun à chacun, aux côtés des triangles H T S, H S P que l'œil a tracés en l'air, vous choisirez un lieu commode où vous établirez une base égale à la ligne T S P, & divisée, comme elle, en deux parties égales aux lignes T S, P S. Au point S vous ferez l'angle P S L égal à l'angle H S P, & l'on plantera des piquets sur le côté S L. On fera aussi au point T l'angle P T L égal à l'angle H T P ci-devant trouvé, & l'on prolongera le côté T L jusqu'à ce qu'il coupe S L en un point L, dont la distance au point P mesurée, fera connoître la longueur de la ligne P H inclinée à l'horison. Ce qui est assez évident; puisque les triangles L P S, L S T sont déterminés sur la ligne P T précisément de la même manière que les triangles H P S, H T S le sont sur la même ligne ou sur une ligne égale: ainsi les lignes qui ont une position semblable, sont égales.

Après avoir donné la manière de connoître la longueur des corps élevés perpendiculairement ou obliquement & accessibles à l'une de leurs extrémités, il ne nous reste plus qu'à faire voir comment l'on peut déterminer la hauteur des élévations totalement inaccessibles, perpendiculaires ou inclinées; car pour les lignes horisontales inaccessibles, nous avons proposé & démontré un moyen très-simple de les trouver (Probl. 24. n°. 73.).

PROBLÊME XXXI.

90. Trouver la hauteur de l'élévation P S inaccessible (*fig.* 77.).

RÉSOLUTION.

Choisissez un point C d'où vous puissiez appercevoir le sommet & le pied de l'élévation PS. Faites planter des piquets sur le prolongement de SC vers A, sur lequel je suppose que l'on puisse s'étendre, & mesurez l'angle PCA, que vous écrirez. Allez ensuite au point A du prolongement CA qui soit raisonnablement éloigné du point C, où vous prendrez la valeur de l'angle CAP Faites donc au point A de la ligne CA l'angle CAM=PCA, & à son point C l'angle ACM=CAP, alors le triangle CAM aura tous ses côtés égaux à ceux du triangle ACP, chacun à chacun; ainsi le sommet M de l'un sera éloigné de la base CA autant précisément que le sommet P l'est de la même base; abaissant donc la perpendiculaire MN, que vous toiserez, elle sera la valeur de l'élévation PS. Ce qui n'a pas besoin de démonstration, après tout ce que nous avons dit (a).

91. Il peut arriver que le terrein ne permette pas que l'on construise le triangle CAM sur la base CA. En ce cas l'opération sera plus longue; il faudra mesurer CA, dont on écrira la valeur, comme on a fait celles des angles ACP, PAC. Après cela on ira choisir un lieu commode à la construction d'un triangle, dont tous les côtés soient égaux, chacun à chacun, aux côtés du triangle ACP; c'est-à-dire, que l'on tracera sur un terrein libre la ligne AB=AC (*fig.* 78.), sur

(*a*) Pour bien reconnoître les côtés égaux dans la dernière figure & dans toutes celles qui sont construites à une fin semblable, on observera que les côtés opposés à des angles égaux, sont égaux; ainsi comme l'angle ACM=CAP, le côté AM=le côté CP. Cette marque est infaillible; on ne sçauroit s'y tromper.

les extrémités de laquelle on fera l'angle BAD = CAP, & l'angle ABD = ACP; ce qui donnera le triangle ABD, qui aura les mêmes côtés que le triangle ACP; par conséquent la perpendiculaire DG sera égale à la perpendiculaire PS. Mesurez donc DG, vous aurez PS; C. Q. F. D.

PROBLÊME XXXII.

92. Trouver la longueur de la ligne inaccessible AB inclinée à l'horison. (*fig.* 79.).

RÉSOLUTION.

Supposons que du point C de l'horisontale DC on apperçoive le haut & le bas de la ligne AB. On mesurera l'angle BCA, que l'on trouvera, par exemple, de 39 degrés. L'on s'écartera ensuite sur l'horisontale CD jusqu'à un point, tel que l'angle BDC soit égal à la moitié de l'angle BCA. Alors, comme l'angle BCA, extérieur au triangle BCD, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés (n°. 65.), on a BCA = BDC + CBD; mais on vient de prendre BDC égal à la moitié de BCA; par conséquent CBD sera égal à l'autre moitié; ainsi CD = CB (n°. 79.).

Faisant présentement sur CD au point C l'angle DCS = BCA, on marchera sur la ligne CS jusqu'à un point S où l'angle CSA soit égal à la moitié de l'angle DCS. Ce qui donnera l'angle CAS égal à l'angle CSA, à cause de l'angle DCS extérieur au triangle ACS; d'où l'on aura CS = CA (n°. 79.). Enfin mesurez la distance du point S au point D; ce sera la longueur de la ligne inaccessible AB inclinée à l'horison.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'opération donne DS = AB. Considérons les deux triangles BCA, DCS. Par la construction, DC = CB, & CS = CA. De plus l'angle DCS = BCA; mais deux triangles, qui ont ces conditions, ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun; ainsi DS = AB. C. Q. F. D. (*a*).

93. Tous les Problêmes précédens sont des Problêmes utiles; il y en a de fort curieux que l'on peut résoudre sans pénétrer plus avant dans les secrets de la Géométrie. Personne n'ignore, ou il est aisé à tout le monde de sçavoir, en lisant la note (*b*),

(*a*) Voilà les plus beaux, c'est-à-dire, les plus difficiles Problêmes de la *Longimétrie* (*) résolus par le moyen d'une Géométrie, qu'un esprit même ordinaire peut entendre en moins de huit jours : c'est ce que nous avons éprouvé plusieurs fois, & de quoi nous nous engageons de convaincre tous ceux qui seront tentés de nous accuser de témérité. Nous n'ignorons pas qu'il y ait bien d'autres méthodes de résoudre ces Problêmes, dont l'éxécution plus expéditive expose à beaucoup moins d'erreurs, toujours inévitables dans la pratique; mais aussi ces méthodes sont fondées sur une Théorie plus élevée, à laquelle les enfans ne sçauroient atteindre.

Quand nous formâmes le projet de composer une Géométrie à la portée des enfans, ou plutôt à l'usage de tout le monde, (car tout le monde est presque enfant à l'égard des Sciences qu'il ignore) nous sentîmes la nécessité de travailler sur un plan nouveau. Il y avoit long-tems que nous avions remarqué que les Modernes conduisoient à la Géométrie par des circuits assez longs, ou par des voies peu naturelles; (quoiqu'ils eussent de beaucoup abrégé & applani le chemin des Anciens,) que leurs propositions étoient à la vérité démontrées, mais qu'il en falloit renouer la chaîne à chaque instant moyennant des *lemmes* ou des propositions isolées ; ce qui marque un défaut de construction; que d'ailleurs ils vous jettent dans une proposition, sans sçavoir à quel propos, & qu'enfin ils ne s'étoient pas avisés de faire servir les plus simples propriétés des lignes aux usages où nous les avons appliquées; nous avons donc pensé qu'une Géométrie, où l'on essayeroit de remplir toutes ces vues, se feroit distinguer par un caractère particulier.

(*b*) Un livre est fait pour tout le monde & pour tous les pays du monde. Ce qui est très-familier dans un endroit, est fort rare ailleurs, ou même y est absolument inconnu; il faut donc tout expliquer.

(*) *Longimétrie*. Science où l'on apprend à mesurer les longueurs ou les distances.

ce que c'est qu'un *Billard*, ce qui signifie *prendre* ou *frapper une bille de bricolle*. On ne s'imagineroit pas que la Géométrie pût tracer le véritable chemin par lequel une bille va en frapper une autre, en lui faisant suivre des directions souvent opposées à celle sur laquelle elle devroit naturellement rouler. On attribue la justesse du coup à une longue pratique du joueur; & si l'on excepte les coups de hazard, on juge tout autre moyen absolument insuffisant. Cependant nous allons déterminer l'unique route que la bille doit tenir.

On trouve dans la Géométrie du Père Lami, un moyen géométrique très-simple de frapper une bille par une seule bricolle. Cet Auteur essaie de résoudre le Problême, en supposant deux bricolles; &

Le Billard est un jeu. On le joue sur une grande table en quarré long, c'est-à-dire, plus longue que large, que l'on appelle aussi Billard. Elle est recouverte d'un tapis vert bien tendu & très-uni. On a un très-grand soin de mettre ce plan ou cette table parallèlement à l'horison, afin que les boules ou les billes, que l'on fait rouler dessus, ne prennent d'autre direction que celle qu'on leur donne. Tout autour de ce plan règne un rebord orné de moulures, qui peut avoir trois ou quatre pouces de large sur deux de hauteur. Son usage est de retenir toujours les billes sur la table. Le côté de ce rebord, qui se présente aux billes, est revêtu de la même étoffe que la table, & il est extraordinairement garni de laine, de crin, en un mot, de matières à ressort, qui reçoivent & redonnent le mouvement; c'est ce qu'on appelle *les bandes du billard*. Elles servent à renvoyer les billes qui viennent les frapper. On doit apporter beaucoup d'attention à la construction de ces bandes, afin que la réfléxion se fasse régulièrement. A chaque coin de cette table, & sur le milieu de chacun des longs côtés, on a pratiqué une *blouse*; c'est un trou dans lequel chacun des joueurs cherche à pousser la bille de son adversaire. Pour cet effet on se sert d'un bâton ou d'une *masse* longue de quatre à cinq pieds ou même de plus, suivant la longueur du billard. L'extrémité de ce bâton, destinée à toucher la bille, est platte & un peu plus large que le diamètre de la bille.

On dit que l'on frappe une bille de *bricolle*, lorsque l'on va frapper les bandes, avant que de tomber sur la bille que l'on veut toucher. Regardez la *fig.* 80. B C D G est la table sur laquelle on joue. Les bords intérieurs des côtés B C, C D, D G, G B, sont les bandes. Aux coins de cette table & sur le milieu de ses longs côtés, on voit les blouses marquées *s*; *xy* est le bâton ou la masse avec laquelle on pousse la bille *r*. On peut remarquer que cette masse s'élargit vers son extrémité *y*, afin que l'on puisse prendre la bille avec plus de facilité.

il entre là-dessus dans un calcul, qui rend sa résolution embarrassée & peu élégante. En cherchant à mieux faire, j'en ai trouvé une résolution si générale qu'elle s'étend à toutes les bricolles, & en même tems si simple, qu'elle peut être conçue après huit jours de Géométrie. Comme il n'y a que quatre bandes à un Billard, nous nous bornerons à résoudre ce Problême, quand on demande une, deux, trois & quatre bricolles; mais auparavant il nous faut exposer un principe de Physique ou d'expérience.

94. Une boule, mise en mouvement dans un espace libre, est repoussée par un corps qui lui résiste, lorsqu'à la rencontre de ce corps elle ne perd pas tout son mouvement. L'action par laquelle cette boule change de direction, s'appelle *réfléxion*. La boule C (*fig.* 81.) animée d'un mouvement, qu'elle ne perd pas à la rencontre du corps impénétrable AB, est forcée de se détourner de sa direction CD, pour suivre la direction DF. On a observé que tout corps ainsi réfléchi gardoit inviolablement une certaine loi, que l'on a découverte. Pourvu que le corps qui frappe & celui qui renvoie, n'aient point d'inégalités sensibles; qu'on laisse, par exemple, tomber une boule de marbre sur une table de marbre, ou qu'un rayon de lumière soit reçu sur une glace de miroir, la boule ou le rayon feront, en se relevant, un angle égal à celui qu'ils ont formé en tombant sur la surface réfléchissante, c'est-à-dire, que l'angle CDA est toujours égal à l'angle FDB. CDA est l'angle *d'incidence*, & FDB celui de *réfléxion*. C'est cette propriété des corps mis en mouvement, que les *Physiciens* (*a*) expriment, quand ils disent

(*a*) *Physiciens*. Ce sont des hommes qui observent les opérations de la Nature, & qui en tirent des conséquences. On ne sçauroit

que *l'angle de réfléxion est toujours égal à l'angle d'incidence.*

PROBLÊME XXXIII.

95. Démontrer par l'expérience que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réfléxion (*fig.* 82.).

RÉSOLUTION.

Cette expérience demande très-peu d'appareil. Placez verticalement ou à angles droits un demi-

commencer de trop bonne heure à expliquer aux enfans les propriétés des corps les plus sensibles. Il n'y a rien qui soit plus à leur portée : le goût des expériences les saisit. Après cela ils veulent tout éprouver. C'est le plus sûr moyen de les prévenir contre ce faux esprit de systêmes Métaphysiques qui n'a régné que trop longtems, & dont je vois que l'on a tant de peine à se défaire. Les esprits vifs & impatiens, ceux qui sont dominés par leur imagination, ont une violente disposition à donner dans cet excès. Les expériences demandent du travail & de l'application. Tout cela coûte. Il est plus facile d'imaginer.

Cependant il est très-aisé de comprendre que la nature ne doit pas aller suivant nos idées ; mais que nos idées doivent se conformer aux avis de la nature. Faut-il donc un si grand appareil pour l'interroger ? Les boutiques des Artisans sont-elles inaccessibles ? Voilà où elle se montre sous toutes les formes, & qu'elle parle à tous nos sens. Les Arts & les Métiers offrent une multitude innombrable d'expériences, variées à l'infini, très-fines & très-recherchées. Les premiers besoins de la vie, l'intérêt & le luxe en sont les auteurs. La boutique de l'Horloger, du Luthier, du Graveur, de l'Orfévre, du Lapidaire, du Menuisier ; celle du Tourneur, du Lunettier, du Miroitier, du Sculpteur, de tous ceux qui travaillent sur les métaux ; l'attelier du Peintre & de l'Architecte, l'Amphithéâtre de l'Anatomiste & le laboratoire du Chimiste ; en un mot, tous les endroits où l'on exerce les Arts utiles & les Arts de goût, en apprendront plus en six mois aux enfans, dont l'éducation est bien conduite, qu'ils ne feront pendant toute leur vie, en suivant la stérile méthode de leur remplir la tête de mots, qu'il leur feroit souvent très-honteux de prononcer dans le commerce de la vie.

On se renferme avec une espèce de mystère dans une chambre pour prouver la pesanteur de l'air & son ressort. L'appareil de l'expérience, les machines qui y servent, la dextérité qu'elles éxigent en imposent à l'esprit ; il perd son activité. Vous n'avez qu'à sortir & montrer les nuages qui nagent dans l'air ; voilà sa pesanteur prouvée. Faites remarquer un ballon qui saute, ou frappez sur une vessie pleine d'air ; on voit son ressort. Je crois qu'il n'y a point de meilleur Cabinet pour l'éducation que le vaste spectacle de la Nature. Les expériences y sont toutes faites ; il n'y a qu'à les observer.

cercle

cercle sur une glace de miroir ABCD; & posez un objet G dans la direction d'un rayon quelconque MO. Allez ensuite placer votre œil L dans la direction d'un autre rayon ON, tel que l'arc PM = l'arc TN; afin que l'angle GOP d'incidence soit égal à l'angle LOT de réfléxion: vous appercevrez l'objet G au centre O. Couvrez ce centre, & allez vous remettre au point L, vous ne verrez plus l'objet G. On n'apperçoit donc l'objet G que par des rayons qui font l'angle d'incidence égal à l'angle de réfléxion; C. Q. F. D.

PROBLÊME XXXIV.

96. On voudroit que la bille M frappât la bille S par une bricolle prise sur la bande AB du Billard ABCD (*fig.* 83).

RÉSOLUTION.

Du point S abbaissez la perpendiculaire ST sur la bande AB. Prolongez cette perpendiculaire jusqu'en O, ensorte que TO = TS. De ce point O tendez une corde jusqu'à la bille M, ou simplement regardez de O en M, & remarquez sur le côté AB le point G, qui se trouve dans l'alignement des points O, M. Ce point G est celui où la bille M doit frapper, afin de rencontrer la bille S, en se réfléchissant.

DÉMONSTRATION.

Il est clair qu'en suivant la route MGS, la bille M frappera nécessairement la bille S. Il s'agit donc de prouver que M poussée en G se réfléchira nécessairement en S.

Considérez les deux triangles GTS, GTO: ils ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun;

ainsi l'angle x = l'angle y = f, son opposé par le sommet; donc $x = f$, c'est-à-dire, que l'angle f d'incidence est égal à l'angle x de réflexion. Par conséquent la bille M poussée en G, se réfléchira sur S; C. Q. F. D.

C'est ainsi que le Père Déchales, Ozanam, le Père Lami, &c. résolvent ce Problême. Je ne sçais point si d'autres l'ont résolu, en supposant deux, trois, & même quatre bricolles. Nous avons déjà dit que le Père Lami cherche à le résoudre par deux bricolles, & que sa manière est très-peu élégante; ce qui nous a engagés à la recherche d'une autre méthode, prise de notre Géométrie même, qui doit avoir par conséquent toute la simplicité dont elle est capable. On va en juger.

PROBLÊME XXXV.

97. On pose pour condition que la bille M aille frapper la bille S par les deux bricolles prises l'une sur la bande A B, & l'autre sur BC (*fig.* 84).

RÉSOLUTION.

Abbaissez, comme ci-devant, la perpendiculaire M T sur A B, & S L sur B C. Faites T O = M T, L P = S L. Tendez un cordeau, ou regardez de O en P; les points G, H, qui sont dans la direction des points O, P, sont les points où il faut que les bricolles se fassent, afin que M aille frapper S, suivant la condition du Problême; de sorte que la seule ligne O P donne les deux points G, H de réfléxion. Il suffit néanmoins de considérer le seul point G; puisque la bille M poussée en G se réfléchira nécessairement en H, d'où elle reviendra sur S.

DÉMONSTRATION.

Par le Problême précédent $x=f=y$; donc l'angle x d'incidence est égal à l'angle y de réflexion ; ainsi la bille M poussée en G, suivra la direction GH. Au point H on a l'angle $z=b$ son opposé au sommet ; mais $b=u$ (n°. 96.), donc $z=u$, c'est-à-dire, que l'angle d'incidence $z=u$, angle de réflexion ; ainsi la bille allant de G en H, se relèvera en S ; C. Q. F. D.

PROBLÊME XXXVI.

98. Il s'agit présentement de frapper la bille S par trois bricolles prises sur les bandes AB, BC, CD (*fig.* 85.).

RÉSOLUTION.

Des billes M, S abbaissez les perpendiculaires ML, SO, sur les bandes AB, DC. Faites LP = LM & OT = OS. Prolongez BC indéfiniment vers G, sur laquelle vous tirerez la perpendiculaire TG, que vous prolongerez jusqu'à ce que GH = TG ; tirez enfin une ligne de H en P. Cette ligne déterminera sur la bande AB le point F, où la bille M allant frapper, se réfléchira en K, d'où elle se relèvera en R, pour tomber sur la bille S.

DÉMONSTRATION.

Si la bille M roule sur les lignes MF, FK, KR, RS, il est très-certain qu'elle frappera la bille S, suivant la condition du Problême. La démonstration se réduit donc à faire voir, que la bille M poussée en F, ne sçauroit prendre d'autre route que la ligne anguleuse MFKRS.

Par la construction, l'angle $x = r = y$. Puis donc que l'angle d'incidence $x =$ l'angle y de réfléxion, la bille M poussée en F prendra la direction F K. Appliquez ce raisonnement aux autres points de réfléxion K, R, où la construction est la même ; vous aurez $z = e = b$; donc $z = b$; par conséquent du point K elle se relèvera en R, où vous avez encore $a = d = t$; donc $a = t$; ainsi du point R elle se réfléchira par la ligne R S, où elle rencontrera S sur son chemin. C. Q. F. D.

On doit s'appercevoir que le Problême à quatre bricolles n'est pas un Problême, dont la résolution doive nous coûter beaucoup : aussi nous nous bornerons à en donner la construction sans démonstration ; elle se présentera assez naturellement à ceux qui auront compris la résolution des trois Problêmes précédens. Ceux qui enseignent, prendront de-là occasion de mettre à l'épreuve la sagacité de leurs Ecoliers.

PROBLÊME XXXVII.

995 Frapper la bille S par quatre bricolles (*fig.* 86.).

RÉSOLUTION.

Abbaissez les perpendiculaires S T, M O, & faites T G = S T, O P = O M. Sur la bande prolongée B C, faites tomber la perpendiculaire G H, que vous continuerez jusqu'à ce que H N = G H. Du point N sur la bande A B prolongée, abbaissez la perpendiculaire N V, & faites son prolongement V L = N V. Du point L en P tirez la ligne L P ; elle donnera sur la bande D A le point R, où la bille M étant poussée, suivra la route anguleuse R Z X V S qui conduit à la bille S. Ce qui est fort aisé à démontrer.

100. Arrêtons-nous un peu sur la résolution de ces Problêmes. Quelques considérations, dont nous allons les accompagner, ne serviront pas peu à les graver dans l'esprit, à y porter une conviction entière & une évidence parfaite. On doit toujours avoir devant les yeux que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réfléxion : c'est-là le principe.

Je dis donc, en reprenant la construction du Problême à une bricole, qu'il est impossible à la bille M d'aller frapper la bille S, en touchant la bande A B, par un point différent du point G (*fig.* 87.) ; que si M est poussée en I du côté de A ou de B, par rapport à G, elle ne prendra pas la direction I S nécessaire à éxécuter le choc.

DÉMONSTRATION.

Par la construction, l'angle de réfléxion SIT = TIO = LIB son opposé par le sommet ; mais c'est une chose qui parle aux yeux, que l'angle LIB est plus petit que l'angle MIB ; par conséquent l'angle de réfléxion SIT seroit plus petit que l'angle d'incidence MIB ; la bille M dérogeroit donc à la loi de la nature que tous les corps éxécutent inviolablement (n°. 95.).

Tandis que nous y sommes, il ne sera pas inutile de faire remarquer une autre loi de la nature ; c'est que la bille M va toujours frapper la bille S par le plus court chemin, c'est-à-dire, que de tous les chemins qui conduisent de M en S par les bandes AB, BC (*fig.* 84.), il n'y en a point de plus court que MGHS, sur lequel M doit rouler nécessairement, afin de frapper S par les deux bricolles prises sur les bandes AB, BC.

101. Avant d'en venir à la démonstration, il faut être prévenu que la ligne droite OP, qui

marque les points H, G de réfléxion, est égale à la ligne anguleuse SHGM, que j'appellerai dans la suite *voie de réfléxion*.

DÉMONSTRATION.

Puisque (construction) SH = PH, on aura SHG = PHG, ajoutant d'une part GO, & de l'autre GM = GO, on trouve PHGO = SHGM. La voie de réfléxion SHGM est donc égale à la ligne droite PO qui marque les points de réfléxion; & cela est généralement vrai dans tous les cas de ce Problême; le nombre des bricolles n'y fait rien.

102. Cela posé, il est très-aisé de démontrer que la bille M va frapper S par le plus court chemin. Prenons le Problême dans la supposition d'une bricolle (*fig.* 87.). Il s'agit de prouver que la voie MIS, différente de la voie de réfléxion MGS, est nécessairement plus grande que cette dernière, c'est-à-dire, que MIS > MGS.

DÉMONSTRATION.

Par la construction, SI = OI; donc SIM = OIM: or OIM > OGM; donc aussi SIM > OGM, qui marque le point G de réfléxion: mais nous venons de voir (n°. 101.) que cette ligne OGM = SGM voie de réfléxion. Par conséquent SIM > OGM est aussi plus grande que SGM. La voie de réfléxion MGS est donc le plus court chemin qu'il y ait de M en S, lorsqu'on est obligé d'y aller de bricolle sur la bande AB; & c'est C. Q. F. D.

Voilà un assez grand nombre de problêmes très-curieux, résolus par la propriété du triangle isoscele; il nous fournit encore un moyen fort simple

d'élever une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne, sans qu'il soit besoin de la prolonger.

PROBLÊME XXXVIII.

103. Sur l'extrémité A d'une ligne quelconque AB élever une perpendiculaire (*fig. X. pl. 8.*).

RÉSOLUTION.

Retranchez de cette ligne une partie quelconque AD. Avec cette partie construisez le triangle équilatéral A M D. Prolongez le côté D M jusqu'en S, desorte que M S = D M. Si l'on tire A S, elle sera la perpendiculaire cherchée.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on suppose que A S est une perpendiculaire, il faut démontrer que l'angle D A S est droit, ou que cet angle vaut 90 degrés.

Remarquez donc que l'angle D A S est composé des deux angles D A M, M A S, ou que D A S = D A M + MAS. Or le triangle A M D étant équilatéral, tous ses angles sont égaux; ainsi chacun d'eux vaut le tiers de 180 degrés, c'est-à-dire, 60 degrés; donc l'angle D A M = 60 degrés : il ne reste donc plus qu'à démontrer que l'angle M A S = 30 degrés. Mais (par la construction) le triangle AMS est isoscèle, c'est-à-dire, que l'angle S vaut l'angle M A S. Observez à présent que l'angle A M D, extérieur au triangle AMS, vaut la somme des deux angles intérieurs opposés S, M A S (Proposition VIII. nº. 65.). Or nous venons de voir que A M D = 60 degrés, parce qu'il appartient à un triangle équilatéral; donc, puisque AMD = S + MAS, & que A M D = 60 degrés, il s'ensuit que la somme des deux angles S + M A S = 60

degrés ; mais ces deux angles sont égaux : ainsi chacun deux = 30 degrés ; l'angle M A S a donc 30 degrés. Joignons-le à l'angle D A M qui en a 60 ; nous aurons D A M + M A S = 60 + 30 = 90 degrés = D A S ; l'angle D A S est donc un angle droit, & par conséquent A S est perpendiculaire sur l'extrémité A de la ligne A B ; C. Q. F. D.

Nous avons vu, par la génération du cercle, (nº. 13.) que la mesure naturelle d'un angle étoit la portion du cercle interceptée entre ses côtés, & décrite du sommet de cet angle ; que la mesure de l'angle D B C (*fig. 88.*), par exemple, qui a son sommet B au centre du cercle, étoit l'arc D C ; mais comme il peut arriver qu'un angle ait son sommet dans la circonférence, comme l'angle D A C, on s'est apliqué à rechercher quelle portion de la circonférence du cercle étoit la mesure de l'angle DAC, & l'on a trouvé que la mesure de cet angle, prise du cercle où il est inscrit, étoit la moitié de l'arc DC qui passe entre ses côtés.

Cette connoissance est très-importante pour la résolution de plusieurs Problêmes fort utiles. Nous allons considérer cette question suivant les différens cas où elle peut avoir lieu. Ils se réduisent à trois ou même à quatre, ainsi qu'on va le voir dans la proposition suivante.

PROPOSITION XIII.

104. L'angle D A C, qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, a pour mesure la moitié de l'arc D C, qui passe entre ses côtés, A D, A C (*fig. 88.*).

Cette proposition renferme trois cas. Le centre du cercle peut se trouver sur l'un des côtés, ou entre ses côtés, ou au-dehors.

Démonstration du premier cas où le centre B se trouve sur un des côtés A C (fig. 88.).

Il s'agit de démontrer que l'angle A est mesuré par la moitié de l'arc DC ou par $\frac{DC}{2}$

Tirez le rayon D B. Puisque A B=D B, l'angle D=l'angle A (par la Proposition XII. n°. 79.); mais l'angle DBC au centre est extérieur au triangle A B D. Ainsi l'angle D B C = A + D = 2 A (n°. 65.). Par conséquent A = $\frac{DBC}{2}$. Or la mesure de l'angle DB C est l'arc D C tout entier; donc la mesure de la moitié de l'angle D B C, c'est-à-dire de l'angle A, est la moitié de l'arc D C; C. Q. F. 1°. D.

Démonstration du second cas où le centre B du cercle se trouve entre les côtés de l'angle D A C (fig. 89.).

Du sommet A tirez le diamètre A N. Par ce moyen la démonstration revient à celle du premier cas; car l'angle D A C = D A N + N A C dont un des côtés A N passe par le centre B; mais par la démonstration du premier cas, la mesure de DAN = $\frac{ND}{2}$, & celle de N A C = $\frac{NC}{2}$. Par conséquent DA C a pour mesure la moitié de l'arc ND avec la moitié de l'arc N C, c'est-à-dire, la moitié de tout l'arc D N C; C. Q. F. 2°. D.

Démonstration du troisième cas où le centre B est placé au-dehors de l'angle D A C (fig. 90.).

Tirez, comme ci-devant, le diamètre A N (*fig. 90.*). Vous aurez D A C=N A C—N A D; mais par la démonstration du premier cas, NAC

$= \frac{ND}{2} + \frac{CD}{2}$, & NAD $= \frac{ND}{2}$, à cause qu'un de leurs côtés AN passe par le centre B; ainsi DAC, qui vaut NAC — NAD, aura pour mesure $\frac{ND}{2} + \frac{DC}{2} - \frac{ND}{2}$ ou simplement $\frac{DC}{2}$; c'est donc à dire que dans tous les cas l'angle DAC a pour mesure la moitié de l'arc CD qui passe entre ses côtés. La converse de cette proposition est vraie, c'est-à dire, qu'un angle qui a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, a nécessairement son sommet à la circonférence du cercle, auquel cet arc appartient.

DÉMONSTRATION.

Il est nécessaire que cet angle soit à la circonférence, s'il ne sçauroit être ni au-dehors ni au-dedans; or un angle, qui est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, ne peut avoir son sommet au-dehors de la circonférence ni au-dedans (*fig.* 91.).

1°. L'angle ABC, dont le sommet est au-dehors de la circonférence, n'a pas pour mesure la moitié de l'arc AC qui passe entre ses côtés AB, BC; car en tirant la ligne OC, on voit que l'angle AOC, à la circonférence, est mesuré par la moitié de l'arc AC (n°. 104.); mais l'angle AOC est extérieur au triangle BOC; cet angle est donc égal à la somme des angles B, C (n°. 65.): ainsi AOC est plus grand que l'angle ABC. Par conséquent l'angle ABC ne peut pas être mesuré par la moitié de l'arc AC.

2°. L'angle ABC, dont le sommet B est au-dedans de la circonférence, n'est pas mesuré par la moitié de l'arc AC qui passe entre ses côtés

(*fig.* 92.) ; car prolongeant un de ses côtés AB jusqu'à la circonférence, & tirant OC, l'angle ABC extérieur au triangle BOC = les angles O, C ; il est donc plus grand que l'angle O à la circonférence qui a pour mesure la moitié de l'arc AC.

Il n'est donc pas possible que l'angle ABC, qui a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés, soit au-dehors, ni au-dedans de la circonférence ; il est donc placé précisément dessus ; C. Q. F. D. (*a*).

(*a*) Le principe de *la Réduction à l'absurde*, consiste en ce que l'on fait voir qu'il y auroit une contradiction réelle, si les choses n'étoient pas telles qu'on les énonce. Nous venons de faire usage de ce principe, en démontrant la converse précédente. L'angle proposé, avons-nous dit, est à la circonférence, ou au-dehors ou au-dedans : mais il est impossible qu'il soit au-dedans ni au-dehors ; il est donc placé nécessairement sur la circonférence.

Pourvu que l'on ait fait une énumération parfaite de toutes les positions qui peuvent convenir à cet angle, il est évident que la démonstration est rigoureuse.

Cependant ces sortes de démonstrations ne sont pas du goût de M. Arnauld. Il avoue (pag. 268 ou 269, liv. XI.) *qu'elles peuvent convaincre l'esprit, en le mettant hors d'état de pouvoir douter qu'une chose soit ; mais il pense qu'elles ne le satisfont pas pleinement, en lui donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement désirer.*

Eclaircissons la pensée de M. Arnauld. Quand je vois un homme dans un endroit, cela est beaucoup plus évident pour moi que si l'on me prouvoit qu'il y est nécessairement, parce qu'il ne sçauroit être ailleurs. Il y a évidence d'une part, & une simple certitude de l'autre.

Cette pensée est très-vraie au fond. Mais c'est trop éxiger de l'esprit humain que de prétendre à une évidence aussi parfaite sur tous les objets de ses spéculations. Le nombre des vérités, dont l'évidence soit entière, est fort petit. Il n'y a guères que les premiers principes qui jouissent de ce privilége. Dès que nous commençons à nous en éloigner, la lumière de l'évidence devient moins vive. Elle s'affoiblit à mesure que nous descendons aux vérités particulières qui en émanent ; & au bout d'une longue suite de propositions qui s'enchaînent sans aucune interruption, on sent qu'elle s'éteint presque entièrement. Nous sommes certains seulement qu'une proposition fort éloignée de son principe est vraie, en faisant voir qu'elle est liée avec des propositions que l'on se souvient avoir été successivement démontrées, quoique la démonstration n'en soit pas actuellement présente à l'esprit ; ce qui produit bien une certitude, & non pas une entière évidence.

Mais le principe de la réduction à l'absurde produit le même effet : ainsi ce moyen nous paroît fort proportionné à la nature de l'esprit humain, plus capable d'être convaincu que d'être véritablement éclairé.

C'est ici qu'il nous faut démontrer la fausseté d'une converse, dont on ne se seroit guères douté.

Nous avons vu qu'un angle ACB au centre C d'un cercle, avoit pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés; mais de ce qu'un angle a pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés, peut-on en conclure que cet angle soit nécessairement au centre du cercle auquel appartient l'arc AB? On seroit d'abord porté à le croire. Cependant, pour vous convaincre que cela n'est pas vrai, prenez un point O au-delà de l'arc AB (*fig. 93.*); tirez AO; faites l'arc OS = l'arc AB, & tracez BS; je dis que l'angle ADB, qui n'est pas au centre du cercle, a néanmoins pour mesure l'arc entier AB qui passe entre ses côtés DA, DB.

DÉMONSTRATION.

Tirez BO : l'angle ADB est extérieur au triangle ODB; cet angle ADB est donc égal à la somme des angles AOB, SBO (n°. 65.); mais ces deux angles sont à la circonférence; ainsi chacun d'eux est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés (n°. 104). L'angle AOB est mesuré

On remarque en effet que tous les hommes se rendent sans aucune réplique à ce raisonnement : *il est impossible que cela ne soit pas; donc cela est.* Par conséquent, puisqu'une démonstration est uniquement faite pour ceux à qui l'on parle, pourquoi ne feroit-on pas valoir un principe qui est si fort à leur portée?

Voici donc ce que je pense de ces deux manières de démontrer. On doit toujours préférer celle des deux qui est la plus courte, la plus frappante, la plus proportionnée au commun des esprits naturellement inappliqués & ennemis du travail. Une démonstration qui prouve directement & par une voie simple qu'une chose est, doit être préférée à celle qui prouveroit la même chose d'une manière indirecte, mais par de plus longs circuits. Au contraire, on s'attachera aux méthodes indirectes, quand on s'appercevra qu'elles convainquent plus rapidement, ce qui arrive assez souvent. Peu de gens sont capables de goûter les rafinemens d'une démonstration; mais tous se laissent emporter à la force de la conviction. Comme il est plus facile de dompter les hommes que de les rendre justes, il est aussi plus aisé de les convaincre que de les éclairer.

par la moitié de l'arc A B, & l'angle S B O par la moitié de l'arc S O = A B : ainsi les deux angles A O B, S B O ont ensemble pour mesure l'arc A B tout entier : cet arc mesure donc aussi l'angle A D B qui est égal à la somme des angles S B O, A O B : par conséquent un angle peut avoir pour mesure l'arc entier qui passe entre ses côtés, sans être placé au centre du cercle auquel cet arc appartient (*a*).

Pour peu même que l'on soit versé dans la Géométrie, on s'appercevra qu'il y a une infinité de points, comme D, au-dedans du cercle, où des angles placés auroient pour mesure l'arc AB qui passeroit entre leurs côtés.

On peut tirer quelques conséquences de ce qu'un angle à la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés.

1°. Tous les angles à la circonférence appuyés sur le même arc sont égaux. Ainsi les trois angles A B C, A D C, A G C (*fig. 94.*), qui s'appuient sur le même arc A C, sont d'égale grandeur, puisqu'ils sont mesurés par la moitié du même arc A C.

(*a*) Nous avons déjà dit plus d'une fois, que les propositions converses n'étoient pas aisées à démontrer. On fera donc passer aux Commençans toutes celles qui paroîtront un peu compliquées. Quand leur intelligence aura acquis plus de force, on y reviendra ; pour ceux qui ont dessein d'être Géomètres, ils ne sçauroient faire trop d'attention à la vérité ou à la fausseté des propositions converses. Si quelques Géomètres modernes y avoient un peu mieux pensé, ils n'auroient pas demandé qu'on leur accordât que toute proposition converse est véritable, ainsi que nous l'avons dit, & par-là ils n'auroient pas donné entrée au paralogisme (*) dans une science qui a toujours eu l'évidence en partage.

(*) *Le Paralogisme* est un raisonnement fondé sur de faux principes, ou dont les conséquences sont mal déduites. On fait encore un Paralogisme, quand on néglige de démontrer des propositions nécessaires, sur lesquelles on ne laisse pas de s'appuyer comme si elles étoient démontrées. Il y a cette différence entre le Paralogisme & le Sophisme ; que le Sophisme se fait par malice ou par subtilite captieuse, au lieu que le Paralogisme est l'effet d'une erreur, d'une ignorance, d'un défaut de lumière ou d'application, sans aucun dessein de surprendre ceux à qui l'on parle.

2°. Tous les angles, dont le sommet est à la circonférence, & qui s'appuient sur les extrémités du diamètre AC, sont des angles droits (*fig. 95.*). Les angles ABC, ADC sont droits, ayant pour mesure la moitié de la demi-circonférence ASC, c'est-à-dire, le quart de la circonférence entière, mesure d'un angle droit.

3°. Coupez un cercle par une corde MN qui ne passe pas par le centre; le cercle sera divisé en deux portions appellées *segmens* (*fig. 96.*). L'angle MON dans le petit segment est *obtus*, car cet angle a pour mesure la moitié de l'arc MCN plus grand que la moitié de la demi-circonférence; & l'angle MCN dans le grand segment est aigu, étant mesuré par la moitié de l'arc MON, qui est plus petit que la moitié de la demi-circonférence.

La propriété qu'a le cercle de donner toujours des angles droits, lorsque son diamètre sert de base aux angles, qui ont leur sommet à la circonférence, nous fournit un moyen fort commode d'élever une perpendiculaire sur l'extrémité A d'une ligne telle que AB (*fig. 101.*).

Prenez un point C à volonté, placé néanmoins de manière qu'en y mettant la pointe d'un compas, dont l'autre branche s'étende précisément au point A, vous puissiez décrire un cercle, qui coupe la ligne AB en quelque point O. De ce point tirez le diamètre OD; & par le point D, où ce diamètre coupe la circonférence, menez AD: elle sera la perpendiculaire cherchée; puisqu'il est évident, par l'article précédent, que l'angle OAD est droit.

105. Nous aurions pu considérer tout de suite l'angle DAC (*fig. 97.*), formé par la corde DA, & par une ligne AC qui rase le cercle, & que l'on appelle *tangente*, c'est-à-dire, touchante; mais il est besoin de faire précéder quelques remarques.

Tirons le rayon B A, sur l'extrémité duquel soit élevée la perpendiculaire A C ; cette perpendiculaire ne touche la circonférence qu'au seul point A. Si elle la touchoit encore en un autre point S, on auroit B A = B S ; car les rayons du même cercle sont égaux, & le triangle B A S seroit isoscèle ; ainsi l'angle B A S égaleroit l'angle B S A : or (construction) B A S est droit ; donc B S A le seroit aussi : dans ce cas il y auroit la valeur de plus de deux angles droits dans le triangle B A S ; ce qui est impossible (nº. 67.).

Nous pouvons observer ici deux choses. 1º. Qu'une tangente ne touche la circonférence qu'en un seul point. 2º. Que cette tangente est nécessairement perpendiculaire sur le rayon B A au point A de *contingence*.

Ceci supposé, je dis encore que l'angle D A C formé par une corde D A & une tangente A C, a pour mesure la moitié de l'arc D A qui passe entre ces côtés.

DÉMONSTRATION.

Tirez le diamètre O A. L'angle O A C = D A C + D A O ; mais (construction) O A C est un angle droit : il a donc pour mesure la moitié de la demi-circonférence, c'est-à-dire, la moitié de l'arc D A avec la moitié de l'arc D O : par conséquent D A C + D A O, pris ensemble, ont pour mesure $\frac{DA}{2} + \frac{DO}{2}$. Or D A O est mesuré par $\frac{DO}{2}$. Donc D A C a pour mesure $\frac{DA}{2}$, c'est-à-dire, la moitié de l'arc D A.

106. Moyennant cette proposition, on peut résoudre d'une manière très-simple un grand nombre

de Problêmes fort curieux dans *l'optique* (a) & très-utiles dans la *fortification* (b). Par la remarque que nous avons faite à ce sujet, on a dû observer que les objets sont vus sous des angles tantôt plus grands,

(a) *L'Optique* est une science où l'on apprend de quelle manière on apperçoit les objets. Il y a des objets qui répandent la lumière, & qui paroissent la renfermer dans leur propre sein; ce sont *des corps lumineux*. Le Soleil, les Etoiles, notre feu terrestre, &c. sont de ce nombre. Il y en a d'autres à travers lesquels la lumière passe; comme le verre, l'air, l'eau, la flamme même, &c. que l'on appelle *diaphanes* ou *transparens*. On en voit enfin d'une troisième espèce qui ne possèdent aucune lumière, & qui ne lui permettent aucun passage; ce sont des *corps opaques*. Nous n'appercevons les corps lumineux que parce qu'ils envoient dans nos yeux la lumière dont ils paroissent pénétrés. Ces corps placés dans un espace libre se font voir de tous les côtés; ils sont donc comme le centre de filets de lumière qui s'étendent au loin tout autour de leur circonférence; c'est ce qui a fait appeller ces filets *rayons de lumière*. Les corps opaques ne se feroient jamais appercevoir, s'ils ne réfléchissoient vers nos yeux les rayons des corps lumineux, qui tombent sur leur surface. De quelques brillantes couleurs qu'ils nous paroissent revêtus, ôtez-leur toute communication avec les rayons lumineux, les voilà plongés dans les plus noires ténèbres.

Ainsi les corps, de quelque nature qu'ils soient, lancent, poussent, réfléchissent ou détournent les rayons de lumiere; mais tout cela se fait selon certaines loix, qui n'ont pas échappé aux hommes attentifs. Des rayons de lumière sont des lignes: ces rayons se croisent; ils forment donc des angles, & par-là ils ressortissent à la Géométrie, instrument universel des découvertes.

On pose pour principe en Optique, que les objets paroissent grands selon la grandeur de l'angle sous lequel ils sont vus. Il est certain que la ligne A B est vue sous l'angle A S B (*fig.* 98.), puisque les rayons A S, B S, qui partent de ses extrémités, viennent se réunir dans l'œil S où ils se croisent. L'expérience apprend aussi qu'au fond de l'œil il se peint une image proportionné à *l'angle de vision*: tout cela se démontre avec un œil artificiel, qui n'est pas rare chez les Artistes ou Amateurs des Arts. Ces faits curieux exposés à propos aux yeux des enfans, animent leur attention, ou, pour mieux dire, entretiennent leur activité.

(b) *La Fortification* enseigne l'art de disposer l'enceinte d'une Place de manière que ceux qui la défendent, puissent résister aux attaques d'un ennemi supérieur en forces. On peut enseigner aux enfans la pratique de la fortification presque toute entière; tirer une ligne droite, la couper en plusieurs parties égales, élever une perpendiculaire, mener des parallèles, former des angles, construire un poligone ou une figure de plusieurs côtés; avec cela on peut exécuter un grand nombre d'opérations de fortifications; mais, je ne cesserai de le répéter, que l'on fasse tout cela en parlant à leur raison. Quoique la Théorie de cette science soit assez simple, on ne sçauroit croire avec quelle négligence on l'enseigne. A en juger même par les livres modernes qui ont paru sur cette matière, il

tantôt

tantôt plus petits. Ce que l'expérience démontre d'une manière bien sensible, lorsque l'on se trouve dans une allée ou une avenue bordée d'arbres plantés sur des lignes parallèles (*fig.* 99.) : les extrémités E, F de cette avenue paroîtront se rapprocher à l'œil placé en S; parce que la distance EF, quoiqu'égale à la distance AB, est vue sous l'angle ESF plus petit que l'angle ASB, sous lequel on voit la distance AB (*a*).

semble que ce soit une pure routine. M. le Blond, Maître de Mathématiques des Enfans de France, est le seul des Ecrivains qui ait saisi la vraie méthode d'exposer un systême de fortification raisonnée. Cet excellent Maître a connu la nature de l'esprit humain, qui n'étend véritablement ses connoissances qu'à proportion que sa raison est éclairée.

On montre à fortifier selon le systême du Chevalier de Ville, du Comte de Pagan, du Maréchal de Vauban, &c. sans remonter aux raisons qui ont déterminé ces ingénieurs célèbres à suivre une route différente de celle qu'ont tenue leurs prédécesseurs. On en dit bien quelque chose en général, mais ce ne sont point les généralités qui instruisent; il faut entrer dans le détail, & ne pas s'imaginer qu'un flanc plus ou moins couvert soit ce qui caractérise les différens systêmes de fortification, comme on a coutume de le persuader aux jeunes gens : question au fond, qui est d'une assez petite conséquence. Ce qui distingue un homme d'un autre homme, un esprit d'un autre esprit, c'est la manière d'envisager un objet par toutes ses faces, de supprimer ou d'ajouter suivant le besoin, de soutenir ce qui étoit déjà établi, ou de détruire par de nouvelles raisons fondées sur de bonnes observations de Physique; voilà ce qui apprend à penser. Cette ligne doit avoir tant de toises; on peut faire cet angle de tant de degrés : que la raison suive le précepte. Rendez compte de tous les mouvemens du compas & de la regle. Les parens n'y prennent pas assez garde. Après deux ou trois mois de fortification on leur montre des plans bien lavés, bien coloriés. On se récrie sur la propreté & la symétrie du dessein; les couleurs avec lesquelles on en détache les différentes parties, sont étendues avec beaucoup d'art; elles ne sauroient être mieux fondues, plus adoucies, ni plus pétillantes; mais demandez à celui qui a construit ce plan si brillant, pourquoi il a suivi telles & telles proportions? quels seroient les inconvéniens d'y déroger? Il vous répond que ce sont les véritables proportions du systême qu'il a suivi; que M. de Vauban s'est conduit sur ces principes; il n'en sait pas davantage. Toute sa science se réduit donc à savoir tirer des lignes, & à étendre des couleurs.

(*a*) Quoique j'aie dit que des allées paroissoient convergentes à cause que les angles décroissent, ce n'est pas à dire, que la grandeur apparente des objets dépende uniquement de l'angle sous lequel ils sont vus. A la vérité, tous les Opticiens conviennent que la grandeur des objets fort éloignés est proportionnelle à l'angle visuel; ce qui

PROBLEME XXXIX.

107. Un œil placé en C, voit la ligne AB ſous l'angle ACB; on demande que l'on trouve un point M d'où la ligne AB paroiſſe ſous un angle une fois plus petit (*fig.* 100.).

RÉSOLUTION.

Suppoſons d'abord que ACB ſoit un triangle iſoſcèle dont AC = CB. Prolongez AC juſqu'en M, ou BC juſqu'en O; en ſorte que ces prolongemens ſoient égaux chacun à CA ou à CB; je dis que du point O ou du point M, la ligne AB paroîtra ſous un angle une fois plus petit que ſi elle étoit vue du point C.

DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes OA, MB; & pour une plus grande facilité, du point C avec le rayon CA décrivez une circonférence. Il eſt clair que les angles O, M à la circonférence ne ſont que la moitié de l'angle ACB au centre (nº. 104.). L'œil placé en M ou en O, verra donc la ligne AB ſous un angle une fois plus petit que s'il regardoit la même ligne du point C. C. Q. F. D.

108. Non-ſeulement la ligne AB paroîtra ſous un angle une fois plus petit, vue du point M ou du point O; mais en quelque point que l'on ſe place ſur le grand arc BMSOPRA (*fig.* 102), la ligne AB paroîtra toujours ſous le même angle, puiſque les angles AMB, ASB, &c. ſous leſ-

ſuffit pour faire comprendre comment les extrémités d'une allée vues de loin, paroiſſent ſe rapprocher; mais quand les objets ne ſont pas fort éloignés, il paroît que la grandeur apparente des objets ſuit d'autres regles.

quels elle sera vue, sont égaux, ayant pour mesure la moitié du même arc AB.

109. C'est pourquoi, si la ligne AB représentoit le devant d'un théâtre, & que les places du spectacle fussent disposées dans la circonférence d'un cercle dont AB fût une corde, le devant du théâtre paroîtroit à tous les spectateurs de la même grandeur, en supposant que la grandeur apparente des objets, dépende de la grandeur de l'angle sous lequel ils sont vus (*a*).

110. Il peut arriver que ACB ne soit pas un triangle isoscèle, c'est-à-dire, que le spectateur en C ne soit pas également éloigné de A & de B (*fig.* 103.).

Pour trouver un point M d'où la ligne AB paroisse sous un angle une fois plus petit, faites le prolongement CM = CA. Le point M est un des points où la lige AB sera vue sous un angle une fois plus petit que si on la regardoit du point C. Tirez la ligne MA.

DÉMONSTRATION.

Puisque (construction) CM = CA, l'angle CMA = MAC (nº. 79.); mais l'angle ACB est extérieur par rapport au triangle MCA : cet angle ACB est donc égal aux deux angles CMA,

(*a*) Je fais toujours abstraction, ici comme ailleurs, du jugement de l'ame, occasionné par la vue des objets interposés; comme ce jugement peut varier suivant que les différens spectateurs ont appris à voir, il est impossible de déterminer au juste ce qui résulte de la combinaison du principe Géométrique avec nos jugemens d'habitude sur la grandeur ou la distance des objets. Au reste on peut donner une raison physique pourquoi un Spectateur en O, quoique plus éloigné de la corde AB que celui qui seroit placé en R, verroit néanmoins cette corde de la même grandeur; c'est que l'obliquité nous dérobe une partie des corps que nous regardons. Le Spectateur en R est à la vérité plus près de la corde AB; mai il la voit aussi plus obliquement; au lieu que du point O il la voit en face, & il regagne par cette position avantageuse ce que l'éloignement lui fait perdre.

MAC pris ensemble (nº. 64), ou, ce qui revient au même, l'angle ACB est double de CMA. L'angle CMA est donc une fois plus petit que l'angle ACB. Ainsi la ligne AB, vue du point M, est vue sous un angle une fois plus petit que du point C.

Si l'on donnoit à la ligne AC un prolongement égal à CB, on auroit un autre point d'où AB paroîtroit sous un angle une fois plus petit que du point C ; & en faisant passer une circonférence par les trois points M, A, B, on trouvera tous les points qui satisfont à la question ; ce que je laisse à chercher aux commençans. Mais il est besoin qu'ils sçachent l'art de faire passer une circonférence par trois points qui ne soient pas en ligne droite.

PROBLÊME XL.

111. Décrire une circonférence de cercle par les trois points A, B, C, qui ne soient pas sur une même ligne droite (*fig.* 104.) (*a*).

RÉSOLUTION.

On voit qu'il suffit de trouver un point I qui soit à égale distance des trois points A, B, C.

Des points, A, B, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de la distance AB, décrivez deux arcs qui se coupent aux points M, N au-dessus & au-dessous de AB, & tirez la ligne indéfinie MN, dont tous les points, par la construction, sont à égale distance de A & de B ; ensuite des points B, C, décrivez deux autres arcs au-dessus

(*a*) Cette condition est nécessaire ; puisque l'on demande un cercle, il ne sauroit passer par trois points en ligne droite ; car il est évident qu'une ligne droite ne peut jamais couper un cercle qu'en deux points.

& au-dessous de BC, qui se coupent aux points D, P; tirez l'indéfinie DP. Son intersection avec MN donnera le point I également éloigné des trois points A, B, C. En mettant donc une des pointes du compas au point I, si on l'ouvre de la grandeur IA, la circonférence que l'on décrira avec ce rayon, passera par les trois points proposés.

DÉMONSTRATION.

Le point I est dans la ligne MN; il est donc éloigné de A, comme il l'est de B: il est aussi dans la ligne DP; par conséquent il n'est pas plus près de B que de C; parce que la ligne DP ayant deux points D, P, à égale distance de B & de C, les a tous. Il en est ainsi de MN par rapport aux points A, B; C. Q. F. D.

PROBLÊME XLI.

112. Trouver un point d'où les lignes AB, CD inégales paroissent sous des angles égaux (*fig.* 105).

RÉSOLUTION.

Faites sur l'une des deux lignes CD le triangle isoscèle CSD à volonté. Construisez aussi sur la ligne AB un triangle ABP qui ait tous ses angles égaux à ceux du triangle CSD, chacun à chacun; c'est-à-dire, faites l'angle PBA = l'angle SDC, & l'angle PAB = l'angle SCD; vous aurez le triangle isoscèle ABP, dont l'angle P = l'angle S du triangle isoscèle CSD (n°. 78.). Du point P avec le rayon PA décrivez un cercle, & du point S avec le rayon SC, décrivez un autre cercle qui coupe le premier aux points O, G; ces points O, G marqueront les endroits où l'œil verra les lignes AB, CD sous des angles égaux.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'angle AOB = l'angle COD.

Des angles sont égaux, quand ils sont moitiés d'angles égaux. Or tels sont les angles AOB, COD; car l'angle AOB étant à la circonférence du cercle, est la moitié de l'angle P (nº. 104.). Par la même raison COD est la moitié de l'angle S = P (par la construction), ainsi l'angle AOB = l'angle COD; les lignes AB, CD inégales, vues du point O, paroîtront donc sous des angles égaux; (nº. 106.). C. Q. F. D.

Un œil placé au point G d'intersection des deux cercles, verroit aussi les deux lignes AB, CD de la même grandeur, ce qui se démontre comme ci-dessus.

Il peut arriver que les cercles ne se coupent pas. En ce cas on fera plus grand le triangle isoscèle CSD, en prenant plus grand le côté CS ou DS.

113. On vient de voir que deux lignes inégales peuvent paroître sous des angles égaux, vues du même point; mais la même ligne AB (*fig.* 106.) vue directement du point O, paroîtra sous un angle plus grand que si elle se présentoit de biais à l'œil placé au même point O, en prenant, par exemple, la position AD; puisque l'angle AOB, sous lequel AB paroît, est évidemment plus grand que l'angle AOD sous lequel on voit AD = AB.

Lorsqu'un œil A (*fig.* 107.) regarde une Boule ou un Globe, il n'en peut appercevoir que la partie RHT renfermée entre les rayons AR, AT, qui le rasent ou qui le touchent; tout autre point comme *x* est absolument caché au spectateur par la convéxité de ce Globe (*a*). Ainsi pour déterminer ce

(*a*) Il n'est point ici question de la *Réfraction*, c'est-à-dire de la

que l'on en peut voir, lorsque sa grandeur & sa distance à l'œil sont données, il faut du point A où l'œil est placé, tirer des tangentes au Globe proposé.

PROBLÊME XLII.

114. D'un point A donné hors du cercle SRHT, tirer deux tangentes à ce cercle (*fig.* 107.).

RÉSOLUTION.

Du point A tirez la ligne AG au centre G du cercle. Coupez cette ligne en deux parties égales au point M, & de ce point décrivez le cercle ARGT, qui coupe la circonférence du premier aux points R, T, par lesquels tirant les lignes AR, AT, elles seront les tangentes que l'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Du point R d'intersection tirez le rayon RG. Si

propriété qu'ont les rayons de lumière de se rompre ou de se détourner de leur direction, quand ils traversent des espaces de différente nature; cependant l'on prendra cette occasion d'expliquer aux jeunes gens ce que c'est que *Réfraction*, comment on peut appercevoir par ce moyen, & indépendamment du miroir, des corps qui sont absolument cachés aux yeux. L'expérience en est très-aisée. Prenez un vase C M (*fig.* X. *pl.* 10.) un peu profond, & qui ne soit pas transparent, tel qu'un vase de terre, de bois, &c. mettez au fond une pièce d'argent ou un corps T facile à voir, dont la couleur se détache bien de celle du fond où il est placé. Eloignez-vous de ce vase jusqu'à ce que les bords vous en cachent le fond. Arrêtez-vous à l'endroit où vous commencerez à perdre de vue le corps T; cela n'arrive que parce que le rayon T L, qui vous le feroit appercevoir, passe au-dessus de votre œil S. Faites remplir d'eau le vase C M. Le rayon T L, en se pliant ou se rompant au sortir de l'eau, (ce qui s'appelle *faire Réfraction*) s'abbaissera au-dessous de sa première direction, & viendra pénétrer l'œil S par la ligne rompue T O S, qui fera appercevoir le corps T & même le fond du vase, quoique le tout soit directement caché à l'œil.

Cette expérience si simple est fort instructive; elle sert à expliquer des effets qui tiendroient du merveilleux, si on n'en connoissoit pas la cause; par exemple, pourquoi le Soleil pourroit paroître se lever deux ou trois fois dans le même jour; elle est par conséquent très-propre à corriger le penchant naturel de l'ame qui nous porte à admirer tout ce que nous ne comprenons pas.

la ligne AR est tangente, elle doit être perpendiculaire sur l'extrémité R du rayon GR, (n°. 105.) ou, ce qui est la même chose, il est nécessaire que l'angle GRA soit un angle droit. Or il est évident que l'angle GRA est droit, car il a son sommet R à la circonférence; il a donc pour mesure la moitié de la demi-circonférence GTA, qui passe entre ses côtés GR, RA (n°. 104.); mais la moitié de la demi-circonférence $=90^{d}$ ou le quart de la circonférence, qui est la mesure d'un angle droit; l'angle GRA est donc un angle droit; ainsi AR est perpendiculaire sur l'extrémité du rayon GR; c'est donc une tangente (n°. 105.). Vous ferez le même raisonnement au point T; d'où vous conclurez que la ligne AT est une autre tangente; C. Q. F. D.

Il arrive souvent, en recherchant les propriétés des surfaces, que l'on a besoin de *circonscrire* une figure au cercle, c'est-à-dire, de disposer une figure comme ABC (*fig.* 108) autour d'un cercle, de manière que les côtés AB, BC, CA soient des tangentes, ce qui éxige que l'on sçache tirer une tangente à un point donné sur la circonférence d'un cercle.

PROBLÊME XLIII.

115. Tirer une tangente au point A pris sur la circonférence du cercle (*fig.* 109.).

RÉSOLUTION.

Tirez le rayon CA. Au point A, élevez une perpendiculaire AB sur ce rayon; elle sera tangente au point A.

DÉMONSTRATION.

On a fait observer (n°. 105) qu'une ligne per-

pendiculaire sur l'extrémité d'un rayon ne touchoit la circonférence qu'en un point; mais c'est précisément la propriété de la ligne AB (construction): cette ligne est donc une tangente.

PROBLÊME XLIV.

116. Si l'on vouloit avoir une tangente commune à deux cercles de différent diamètre, voici comment il faudroit s'y prendre (*fig.* 110.).

RÉSOLUTION.

Joignez les centres des cercles par la ligne CD. Coupez cette ligne en deux parties égales au point M. De ce point & avec le rayon MC ou MD, décrivez la demi-circonférence GOD. Prenez l'excès du rayon du grand cercle sur celui du petit. Portez cet excès de D en B sur la demi-circonférence GOD, & par ce point B tirez le rayon DS à l'extrémité duquel élevant la perpendiculaire indéfinie NSG, elle sera tangente commune aux deux cercles proposés.

DÉMONSTRATION.

BD étant l'excès du grand rayon sur le petit, il est clair que BS = CG rayon du petit cercle. Tirez CB; l'angle CBD est un angle droit, parce que ayant son sommet à la circonférence, il a pour mesure la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés BC, BD (n°. 104.); or cet arc est une demi-circonférence. CB est donc perpendiculaire sur BS; la ligne NSG est aussi perpendiculaire sur BS (par la construction); mais deux perpendiculaires sur une même ligne sont parallèles (n°. 54): les lignes NSG, BC sont donc à égale distance

l'une de l'autre pendant tout leur cours ; elles sont par conséquent toujours éloignées d'une grandeur égale à BS, qui vaut le rayon CG du petit cercle ; SN passe donc par l'extrémité G du rayon perpendiculaire CG, qui marque la distance du point C à la ligne NSG ; cette ligne est par conséquent tangente au petit cercle. Elle est aussi tangente du grand cercle (par la construction) ; c'est donc une tangente commune, ainsi qu'on le demandoit.

PROBLÊME XLV.

117. Trouver une tangente qui touche deux cercles de différent diamètre, l'une au-dessus, l'autre au-dessous (*fig.* 111.).

RÉSOLUTION.

Joignez, comme ci-devant, les centres G, D par la ligne GD, que vous couperez en deux parties égales au point M, d'où vous décrirez une demi-circonférence. Après cela vous porterez le petit rayon GH de P en S ; afin d'avoir la somme des rayons DP, GH, dans la ligne DS, avec laquelle du centre D faites une section en A, & tirez la corde DA. Au point B, où cette corde coupe le grand cercle, élevez la perpendiculaire BE, elle ira aussi toucher le petit cercle. Si l'on abaisse la perpendiculaire GE, & que l'on tire AG ; la démonstration deviendra tout-à-fait sensible, en se rappellant que DA est la somme des rayons.

Voyez à la note (*a*) quel est l'usage de ces tangentes communes.

(*a*) Ces Tangentes sont fort ordinaires dans l'*Optique*. Ce sont elles qui déterminent l'étendue des ombres causées par les corps opaques d'une figure ronde. Cependant de tous les Auteurs de ma

De l'Inscription & de la Circonscription des Figures.

118. La circonférence du cercle est d'un très-grand usage dans la construction des fortifications sur le papier : en divisant cette circonférence en autant de parties égales qu'il en est besoin, & tirant les cordes que ces points déterminent, on aura les *Polygones réguliers*, sur lesquels on fera la construction nécessaire.

Un Polygone régulier est un espace tel que la figure 113, environné d'une ligne anguleuse ABCDEF, divisée en parties égales appellées

connoissance qui ont donné des Elémens de Géométrie, de tous ceux même qui ont composé des Traités d'Optique, il n'y en a pas un seul qui ait pensé à décrire & démontrer la manière de tirer une tangente commune à deux cercles de différent diamètre. Nous avons résolu & démontré ce Problème sans employer les proportions dont nous nous sommes proposé de ne faire aucun usage dans ce premier volume de nos Institutions *, parce qu'elles demandent une suite de raisonnemens fort au-dessus de la portée de ceux que nous avons ici en vue. On fera donc remarquer aux enfans qu'un globe lumineux, tel que le Soleil (*fig.* 112.) ne peut éclairer que d'un seul côté *x* le corps opaque D ; que l'autre côté Y est absolument dans l'ombre terminée en C par les tangentes communes HC, RC, plus ou moins longues, selon que le corps S est plus grand que le corps D, ou qu'il en est plus ou moins éloigné. Que si la grandeur & la distance de ces corps sont données, ainsi que cette figure le représente, on trouvera facilement la longueur de l'ombre. L'expérience s'en fera pendant la nuit d'une manière très-marquée ; en éloignant un flambeau d'une boule, & l'approchant ensuite, on verra alternativement l'ombre croître & diminuer. On peut même à cette occasion expliquer aux enfans la cause générale d'une Eclipse, & l'on aura un très-grand soin de ne jamais employer les termes de l'Art, à moins que ceux à qui l'on parle ne soient familiarisés avec les idées attachées à ces termes, donnant toujours la définition ou la phrase au lieu du mot. J'observerai même que c'est un défaut où l'on ne tombe que trop souvent dans la conversation, lorsque l'on discourt sur des effets qui sont du ressort de quelque science. On prononce une foule de mots inintelligibles à ceux qui écoutent, qui ne sont pas obligés d'être du métier. De tout ce qui peut entrer dans les conversations ordinaires, il n'y a rien que l'on ne puisse rappeler à des idées très-sensibles, que l'on peut toujours rendre par des mots fort communs ; car enfin on parle pour se faire entendre, & pour être entendu de tout le monde.

* C'est dans la Géométrie de l'adolescence, qui est la suite de ces Institutions, que je traite des lignes proportionnelles & des solides.

côtés, & dont tous les angles sont égaux. Les Polygones ont des noms particuliers qu'ils prennent du nombre des côtés dont leur circonférence ou périmètre est composée. Celui qui n'a que trois côtés égaux, s'appelle *Triangle équilatéral*. Le *quarré* a quatre côtés égaux & tous ses angles droits. On nomme *Pentagone* celui qui a cinq côtés égaux. L'*Héxagone* en a six; l'*Eptagone* sept; l'*Octogone* huit; l'*Ennéagone* neuf; le *Décagone* dix; l'*Endécagone* onze, & le *Dodécagone* douze, &c. Il y a encore quelques Polygones auxquels on donne des noms particuliers; nous les définirons quand l'occasion s'en présentera (*a*).

Une figure *circonscrite* est celle dont tous les côtés sont des tangentes au cercle; telle est la figure ABC (*fig.* 108.).

On dit qu'une figure est *inscrite* dans un cercle, lorsque tous les angles de cette figure ont leur sommet à la circonférence du cercle. La figure 113 précédente est une figure inscrite.

De toutes les figures régulières que l'on peut inscrire ou circonscrire au cercle, l'Héxagone est la plus facile. Il est donc à propos de commencer par cette figure.

PROBLÊME XLVI.

119. Inscrire un Héxagone dans un cercle (*fig.* 114.).

RÉSOLUTION.

Portez le rayon de ce cercle six fois sur sa circonférence; il la divisera éxactement en six parties éga-

(*a*) Lorsque l'on converse, il est beaucoup mieux de désigner les Polygones par le nombre de leurs côtés, que de les appeler par leur nom propre, qui n'est pas assez généralement entendu. Personne n'aura de difficulté à se former l'idée d'une figure de neuf côtés égaux; mais si vous prononcez le mot *Ennéagone*, qui signifie pourtant la même chose, il faudra vous expliquer.

les. Par les points de division, vous n'avez qu'à tirer des cordes, elles donneront l'Héxagone que l'on demande.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que le rayon du cercle, porté sur la circonférence, dont il devient corde, donne un arc de 60 degrés, qui est la sixième partie de 360 degrés, valeur de la circonférence entière. Tirez les rayons CA, CB. Le triangle CAB est équilatéral; ainsi tous ses angles sont égaux (nº. 81), ils valent ensemble 180 degrés ou deux angles droits (nº. 67.); chacun de ces angles aura par conséquent le tiers de 180 = 60 degrés; donc l'angle ACB = 60 degrés; ainsi l'arc AB, qui en est la mesure, est la sixième partie de la circonférence, puisque six fois 60 = 360 degrés; C. Q. F. D.

120. L'angle ACB, dans tous les Polygones, s'appelle l'*angle au centre*. Sa valeur en degrés se détermine en divisant 360 par le nombre des côtés du Polygone; ce que l'on peut voir très-facilement; en tirant des rayons à chaque angle du Polygone, il se formera au centre autant d'angles égaux que le Polygone a de côtés. Et comme tous ces angles ensemble valent 360 degrés, si l'angle au centre appartient à un Héxagone, sa valeur sera la sixième partie de 360 = 60 degrés.

121. L'angle ABD, formé par deux côtés voisins AB, BD, se nomme *angle du Polygone*; il est aussi facile à déterminer que l'angle au centre. Il est évident que le rayon CB coupe cet angle en deux parties égales : ainsi l'angle ABD du Polygone = 2 CDB = CBD + BDC. Or ces deux angles valent ensemble 180 degrés, moins l'angle BCD au centre (nº. 67.); par consé-

quent, quand vous aurez trouvé l'angle au centre; vous retrancherez cet angle de 180 degrés, & le reste sera la valeur de l'angle du Polygone régulier. Dans le cas d'un Héxagone ôtant 60 degrés, valeur de l'angle au centre, de 180 degrés, il reste 120 degrés pour l'angle du Polygone.

On pourroit encore trouver cette valeur en observant que l'angle ABD (*fig.* 114.) du Polygone a son sommet dans la circonférence du cercle; il a donc pour mesure la moitié de l'arc DEFGA qui passe entre ses côtés AB, BD (n°. 104.); or cet arc=quatre fois 60=240, dont la moitié 120 est la mesure de l'angle ABD du Polygone, ainsi que nous l'avons déjà vu.

122. Dans un Polygone une perpendiculaire CO abaissée sur l'un de ses côtés AB, est appellée *rayon droit*, ou simplement *la perpendiculaire*, & quelquefois *Apothéme* : elle divise, comme on le voit, en deux parties égales le côté AB, sur lequel elle tombe (n°. [illegible]). On nomme quelquefois *rayons obliques*, les lignes CA, CB, &c. tirées du centre aux angles du Polygone ; sans doute parce que ces rayons sont obliques au côté du Polygone.

PROBLÊME XLVII.

123. Circonscrire un Héxagone à un cercle (*fig.* 115.).

RÉSOLUTION.

Commencez l'opération comme si vous vouliez inscrire un Héxagone, & par les points de division tirez des tangentes (n°. 115.); leur rencontre déterminera l'Héxagone circonscrit.

DÉMONSTRATION.

La démonstration se réduit à prouver que AB

=BD; car on appliquera le même raiſonnement à tous les autres côtés. Tirez aux points de diviſion les cordes SP, PO, OM qui ſont égales par la conſtruction; & remarquez que le triangle SAP ou PBO ou ODM eſt iſoſcèle; car (n°. 105.) l'angle APS formé par la tangente AP & par la corde PS, a pour meſure la moitié de l'arc PS; l'angle ASP a auſſi pour meſure la moitié du même arc. Ainſi l'angle APS=ASP; donc AS=AP. (n°. 80). En ſuivant ce même raiſonnement, vous trouverez que PB=BO. Si vous conſidérez encore que le triangle SPA a tous ſes côtés égaux aux côtés du triangle POB, chacun à chacun; vous verrez que SA=AP=PB=BO=OD. Ainſi AP+PB=BO+OD, c'eſt-à-dire, AB=BD; C. Q. F. D.

Voulez-vous une démonſtration qui ait un moindre détail, & qui ſoit peut-être plus naturelle que la précédente? faites attention que l'arc SP étant égal à l'arc PO, les tangentes que l'on conſtruira aux extrémités de l'un, ſeront déterminées préciſément de la même manière que les tangentes formées aux extrémités de l'autre, d'où l'on déduira leur égalité.

Autre conſtruction de l'Héxagone circonſcrit, où la Démonſtration pourra paroître plus ſimple (fig. 116).

124. Marquez, comme auparavant, les points O, S, P, de l'Héxagone inſcriptible. Tirez un de ſes côtés OS. Sur ce côté abaiſſez perpendiculairement le rayon CRH: par le point H tirez une tangente AHB qui ſera déterminée par le prolongement des rayons CO, CS. Cette tangente ſera le côté de l'Héxagone circonſcrit au cercle. Pour avoir les autres côtés du centre C avec le rayon CA ou

CB, décrivez une circonférence sur laquelle vous porterez six fois AB, & vous aurez un Héxagone circonscrit au premier cercle.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver qu'en conséquence de la construction AB=BD.

Puisque OS & SP sont des côtés de l'Héxagone inscriptible, (construction) tous les angles du triangle OCS valent chacun 60 degrés; mais (par la construction) les lignes AB, OS, étant toutes deux perpendiculaires sur la même ligne CH, sont parallèles entr'elles (nº. 54.); ainsi l'angle CSO est égal à l'angle CBA (nº. 55.); le triangle CAB est donc équilatéral comme le triangle COS: ainsi AB=CB rayon du cercle ponctué: par la même raison vous trouverez que BD=CB. Donc AB=BD.

Je me suis beaucoup étendu sur la circonscription de l'Héxagone, parce que tous les autres Polygones se circonscrivent en suivant la même méthode: ainsi nous n'aurons point besoin dorésnavant de nouvelles démonstrations, quand il s'agira de circonscrire à un cercle tout autre Polygone.

PROBLÊME XLVIII.

125. Sur une ligne donnée FE construire un Héxagone (*fig.* 113.).

RÉSOLUTION.

Des points F, E avec la ligne proposée FE, décrivez deux arcs qui se coupent en G. De ce point & d'une ouverture de compas toujours égale à la ligne FE, décrivez un cercle qui passera par les points

points F, E, sur lequel portant FE six fois, vous aurez un Héxagone construit sur la ligne FE, ainsi qu'on le demandoit.

DÉMONSTRATION.

Elle est claire (n°. 119.), puisque FE est égale au rayon du cercle qui divise la circonférence en six parties égales.

PROBLÊME XLIX.

126. Faire ensorte que la ligne FE soit en même tems le côté d'un Héxagone inscrit, & celui d'un Héxagone circonscrit à deux cercles différens (*fig.* 117).

RÉSOLUTION.

Avec la ligne FE & des points F, E, décrivez deux arcs qui se coupent au point C. De ce point abbaissez une perpendiculaire CO sur la ligne FE. Si du même point C avec une ouverture de compas = FE, vous décrivez un cercle, qu'ensuite avec une ouverture de compas = CO, vous en décriviez un autre; la ligne FE, portée six fois sur le grand cercle, donnera un Héxagone qu lui sera inscrit en même tems qu'il sera circonscrit au petit; ce qui est assez clair (n°. 123. 124. 125.)

PROBLÊME L.

127. Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné (*fig.* 118.).

RÉSOLUTION.

Vous ferez cette opération comme si vous aviez dessein d'inscrire un Héxagone, & vous tirerez

trois cordes, dont chacune ſoutienne un arc double de l'arc de l'Héxagone; elles formeront un triangle équilatéral inſcrit.

La circonſcription de ce Polygone au cercle ſe fera ſuivant la méthode que nous avons propoſée aux numeros 123, 124.

Nous venons de ſuppoſer que le cercle, auquel nous avons inſcrit & circonſcrit le triangle, fût donné; mais on a quelquefois beſoin d'inſcrire ou de circonſcrire un cercle à un triangle donné, de quelque nature qu'il puiſſe être.

PROBLÊME LI.

128. On propoſe d'inſcrire un cercle dans le triangle A B G; c'eſt-à-dire, de décrire un cercle dont les trois côtés du triangle A B G ſoiént des tangentes (*fig.* 119.).

RÉSOLUTION.

Diviſez les angles A, B en deux parties égales par les lignes A *s*, B *x*. Du point C, où ces deux lignes ſe coupent, abbaiſſez ſur l'un des trois côtés du triangle une perpendiculaire C D. Avec cette perpendiculaire décrivez un cercle du point C. Je dis que les trois côtés du triangle ſeront des tangentes à ce cercle.

DÉMONSTRATION.

Du point C abbaiſſez les perpendiculaires C O, C M ſur les deux autres côtés. Si les trois perpendiculaires C D, C O, C M ſont égales, il eſt certain que les trois côtés ſont des tangentes. Conſidérez d'abord les deux triangles C M A, C D A, qui ont chacun un angle droit; de plus l'angle *a* du premier = l'angle *b* du ſecond (conſtruction); ainſi

le troisième angle MCA d'une part est égal au troisième angle ACD d'une autre part : le côté CA est commun à ces deux triangles ; par conséquent l'un est déterminé précisément de la même manière que l'autre ; ainsi les côtés de l'un sont égaux aux côtés de l'autre, chacun à chacun, c'est-à-dire, que les côtés opposés à des angles égaux sont égaux ; par conséquent la perpendiculaire MC opposée à l'angle a, est égale à la perpendiculaire CD opposée à l'angle $b=a$. En comparant de la même manière le triangle CDB avec le triangle CBO, on trouvera que CD=CO ; d'où il suit que les trois perpendiculaires CM, CD, CO sont égales : C. Q. F. D.

Remarquez qu'en divisant l'angle G en deux parties égales, & l'un des deux autres angles, on trouveroit le même point C ; ainsi on divisera deux angles du triangle proposé indifféremment ; d'où il résulte que les trois lignes, qui divisent en deux parties égales les trois angles d'un triangle, se rencontrent toutes au même point.

119. On circonscrit un cercle à un triangle de la même manière que l'on fait passer une circonférence par trois points donnés, qui ne sont pas sur une même ligne droite (n°. 111.). On emploie ce même moyen pour faire renaître une circonférence, dont il ne reste qu'une portion ; ce qui peut être utile dans la pratique. On sçait que le cadran d'une horloge ou d'une montre est composé de plusieurs circonférences *concentriques*, c'est-à-dire, qui ont le même centre. Il arrive quelquefois qu'une grande partie de ces cadrans se détruit, & que l'on a intérêt de les reproduire tels qu'ils étoient d'abord. La Géométrie nous fera retrouver cette circonférence, ainsi qu'on va le voir.

PROBLÊME LII.

130. Trouver le reste d'une circonférence dont on a la portion ABC (*fig.* 120.).

RÉSOLUTION.

Marquez sur cette portion trois points A, B, C à volonté. Coupez l'arc AB en deux parties égales par la ligne OS (n°. 36.); faites aussi que la ligne PM coupe l'arc BC en deux parties égales. Le point I d'intersection est le centre de la circonférence à laquelle l'arc ABC appartient; ce qui se démontre, ainsi qu'on l'a éxécuté au n°. 111, Problême 40.

PROBLÊME LIII.

131. Inscrire dans un cercle un Dodécagone ou un Polygone régulier de douze côtés (*fig.* 121.).

RÉSOLUTION.

Prenez un arc de 60 degrés, en portant le rayon CD depuis A jusqu'en B (n°. 119.), coupez l'arc AB en deux parties égales au point D, & tirez la corde AD. Portez-la douze fois sur la circonférence, elle la divisera éxactement en douze parties égales. Continuant à tirer des cordes à tous les points de division, on aura le Dodécagone inscrit.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'arc AB est six fois dans la circonférence, sa moitié AD y sera douze fois; C. Q. F. D.

132. Si l'on continuoit de couper en deux parties égales l'arc du Dodécagone, on auroit un Po-

lygone régulier de 24 côtés, & divisant toujours en deux celui qui viendroit, on auroit à l'infini des Polygones réguliers, dont le suivant auroit toujours un nombre de côtés double de celui qui le précéderoit immédiatement. A commencer par le triangle équilatéral, on verroit une suite de Polygones réguliers, dont le premier seroit de trois côtés égaux, le second de six, le troisième de douze, le quatrième de vingt-quatre, le cinquième de quarante-huit, &c. ce qui n'a pas besoin d'autre explication.

Pour circonscrire des Polygones d'un pareil nombre de côtés, lorsque l'on aura marqué sur la circonférence du cercle les points du Polygone inscriptible, on tirera des tangentes par tous ces points. Elles donneront un Polygone circonscrit tel qu'on le demande.

PROBLÊME LIV.

133. Sur la ligne donnée AB construire un Dodécagone.

RÉSOLUTION.

Je vais donner une méthode de construire un Polygone quelconque sur une ligne donnée, pourvu que l'on sçache inscrire ce même Polygone dans un cercle.

Puisque vous voulez construire un Dodécagone sur la ligne A____________________B, inscrivez d'abord ce Polygone dans un cercle quelconque (n°. 131.), vous aurez l'angle de ce Polygone (n°. 121.). Aux extrémités A, B de la ligne donnée, faites des angles égaux chacun à celui du Polygone inscrit. Portez la ligne A B sur les côtés de ces angles, afin qu'elle les détermine. Aux ex-

trémités de ces côtés nouvellement déterminés ; continuez à faire des angles égaux à celui du Polygone inscrit ; donnez toujours à ces angles des côtés égaux à la ligne AB, & continuez ces opérations jusqu'à ce que la figure soit entièrement fermée ; vous aurez un Dodécagone, dont tous les angles sont égaux, & tous les côtés égaux à la ligne AB.

On peut abréger cette opération en coupant en deux parties égales les angles faits aux extrémités de la ligne AB. Les lignes qui opéreront cette division, iront se rencontrer en un point, duquel décrivant une circonférence par les extrémités A, B de la ligne donnée, cette circonférence sera divisée exactement en douze parties égales par la ligne AB. D'où il résultera un Dodécagone construit sur la ligne AB, ainsi qu'on demandoit. Les Maîtres feront exécuter tout ce détail aux Commençans. En se rendant un peu attentifs à la construction, la démonstration sera fort sensible.

PROBLÊME LV.

134. Inscrire un quarré dans un cercle (*fig.* 122.).

RÉSOLUTION.

Tirez les deux diamètres AB, CD qui se coupent à angles droits au centre S. Ces diamètres détermineront sur la circonférence les quatre points A, C, B, D, par lesquels on n'a qu'à tirer des cordes, qui donneront le quarré ACBD inscrit.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver deux choses. 1°. Que les quatre angles sont droits. 2°. Que les quatre côtés AC, CB, BD, DA sont égaux.

Il est aisé de remarquer que tous les angles de cette figure sont des angles droits, puisqu'ils ont tous leur sommet à la circonférence, & qu'ils s'appuient sur le diamètre; & qu'ainsi ils sont mesurés par la moitié de la demi-circonférence qui passe entre leurs côtés (n°. 104.), c'est-à-dire, qu'ils ont chacun pour mesure le quart de la circonférence, valeur de l'angle droit.

2°. Que tous les côtés de cette figure soient égaux; c'est une chose visible par la construction; car CS étant perpendiculaire sur le milieu de AB, n'incline d'aucun côté; ainsi CA = CB. BS est aussi perpendiculaire sur le milieu de CD. Donc CB = BD, & par la même raison BD = DA. Par conséquent les quatre côtés de cette figure sont égaux. C'est donc un quarré; ayant d'ailleurs tous ses angles droits.

PROBLÊME LVI.

135. Inscrire un Octogone dans un cercle (*fig.* 123.).

RÉSOLUTION.

Commencez par déterminer les points A, C, B, D, du quarré inscriptible. Ces points diviseront la circonférence en quatre parties égales. Coupez chaque partie en deux, & tirez des cordes à tous les points de division; elles produiront l'Octogone, puisque 2 fois 4 = 8.

Il suffira de couper en deux parties égales une des quatre parties déterminées par les points du quarré inscriptible, & d'en porter la moitié sur les trois autres.

En continuant cette opération, c'est-à-dire, en divisant toujours par 2 l'arc qui viendroit, on auroit à l'infini une suite de Polygones réguliers, dont

le premier vers le centre du cercle feroit de quatre côtés, le second de 8, le troisième de 16, le quatrième de 32, &c. & ainsi de suite à l'infini, en doublant toujours.

136. On circonscrira un quarré ou un Octogone autour d'un cercle, en marquant sur la circonférence du cercle les points du quarré ou de l'Octogone inscriptible. Par ces points on menera des tangentes au cercle; elles formeront le quarré ou l'Octogone circonscrit (nº. 123. 124.).

PROBLÊME LVII.

137. Au lieu d'inscrire ou de circonscrire un quarré à un cercle donné, supposons que l'on ait un quarré ABCD où il s'agisse d'inscrire un cercle (*fig.* 124.).

RÉSOLUTION.

Coupez les quatre côtés du quarré en deux parties égales. Tirez les lignes ON, MS aux points de division. Leur point d'interfection P est le centre du cercle qui touchera les quatre côtés, en lui donnant pour rayon PO, ou PM, &c.

DÉMONSTRATION.

Elle est assez claire (*a*).

(*a*) Ce n'est pas la peine de faire les frais d'une démonstration régulière, quand les constructions sont aussi sensibles que celle-ci. Il arrive souvent qu'après l'étalage d'un long discours, les Commençans cessent de voir ce qui leur paroissoit d'abord tout évident. La démonstration n'a été établie que pour suppléer au défaut des sens, ou pour corriger leur abus. S'il suffit d'ouvrir les yeux pour appercevoir qu'une chose est, il ne faut pas se tourmenter l'esprit à en chercher les raisons; cela conduiroit beaucoup plus au dégoût qu'à l'évidence. Ainsi, par rapport aux constructions bien simples, il y a de l'avantage à laisser agir le témoignage des sens; il est plus expéditif, & va plus vite que celui de la réfléxion, & par-là il est plus conforme au caractère de la jeunesse.

PROBLÊME LVIII.

138. Circonscrire un cercle autour d'un quarré donné ABCD (*fig.* 125.).

RÉSOLUTION.

Une ligne tirée d'un angle à un autre angle opposé, comme BD, s'appelle *Diagonale*. Tracez donc les Diagonales BD, AC. Leur point O d'intersection sera le centre du cercle que l'on pourra circonscrire au quarré, en donnant à ce cercle la ligne OC pour rayon.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le point O est également éloigné des quatre points A, B, C, D.

Remarquez que le triangle ABC est un triangle isoscèle rectangle; l'angle en B est droit (const.): ainsi l'angle BAO = 45 d. aussi bien que l'angle BCO. Le triangle BAD est aussi un triangle isoscèle rectangle en A (construction); par conséquent l'angle ABO = 45d; ainsi l'angle ABO = l'angle BAO, que nous avons remarqué être de 45 d; donc OB = OA (nº. 80.). Vous prouverez de même que OB = OC, & que OC = OD; qu'ainsi le point O est également éloigné des quatre points A, B, C, D; C. Q. F. D.

Mais ces deux derniers Problêmes supposent que l'on sçache construire un quarré sur une ligne donnée.

PROBLÊME LIX.

139. Sur la ligne AB construire un quarré (*fig.* 126.).

RÉSOLUTION.

Aux extrémités A, B de cette ligne élevez les deux perpendiculaires A D, B C égales à la ligne A B donnée, & tirez C D; vous aurez le quarré ABCD, tel qu'on le demandoit.

DÉMONSTRATION.

Elle est claire par la construction.

On pourroit simplifier cette construction, en n'élevant que la perpendiculaire A D=A B. Ensuite du point D avec le rayon A B décrire un arc, & du point B en décrire un autre qui coupe le premier en C. Auquel point tirant les lignes D C, B C, elles achèveront le quarré A B C D.

Autre manière de construire un quarré sur la ligne A B sans l'opération des perpendiculaires (fig 127.).

140. Du point A avec la ligne A B décrivez l'arc indéfini BODPS, & du point B avec la même ligne décrivez un autre arc indéfini AOCX qui coupe le premier au point O. Portez A B de O en P, & tirez PB; elle coupera A O en deux parties égales au point I. Portez I O de O en C & en D; les points C, D détermineront le quarré: tirez donc les côtés A D, D C, C B, ils produiront un quarré construit sur la ligne A B.

DÉMONSTRATION.

Il est évident d'abord que D A, A B, B C sont des lignes égales (const.). Si de plus on démontre que les deux lignes D A, C B sont perpendiculaires sur les extrémités de A B, il sera prouvé que D C =A B, par conséquent que les quatre côtés D A,

AB, BC, CD sont égaux & tous les angles droits. Prouvons donc que les lignes DA, CB forment des angles droits sur la ligne AB.

Faites que l'arc BODPS soit une demi-circonférence entière, qui vaut 180d. Par la construction l'arc BO en vaut 60 (nº. 119.) aussi-bien que l'arc OP, puisque nous avons fait BO = OP : reste donc 60d. pour l'arc PS. Or l'angle PBS est à la circonférence du cercle ; il a donc pour mesure la moitié de l'arc PS ; c'est donc un angle de 30d. Par conséquent l'arc AI décrit de son sommet B = 30d. Mais AO en vaut 60 (nº. 119.). Donc cet arc est coupé en deux parties égales au point I par la ligne PB ; & comme l'on a porté IO, c'est-à-dire, 30d. de O en C & en D, l'arc AOC = 90d. aussi-bien que l'arc BOD. Mais un arc de 90d. est la mesure d'un angle droit ; par conséquent les angles A, B sont des angles droits ; C. Q. F. D. (a).

PROBLÊME LX.

141. Inscrire dans un cercle un Pentagone ; c'est-à-dire, une figure régulière de cinq côtés (*fig.* 128.).

RÉSOLUTION.

Sur le diamètre AB élevez le rayon perpendi-

(a) Quand on trouve des constructions un peu longues, comme celle-ci, il est à propos de donner la démonstration à mesure que l'on opère. L'esprit a moins de peine à se rappeller le détail de l'opération : de plus, à chaque ligne que l'on tire, on voit ce qui en résulte ; ce qui oblige nécessairement à se rendre attentif. Observant toujours de ne rien démontrer aux Commençans, à moins qu'ils ne construisent eux-mêmes les figures qui servent à la démonstration : cette conduite est fort propre à les mettre bien au fait de l'état de la question, à leur faire connoître toutes les suppositions ou les données dont il faut déduire la démonstration, qui doit toujours être une conséquence nécessaire de la construction.

culaire CS. Portez ce rayon de B en O & en D; & tirez OD, qui coupe le diamètre au point x. Ouvrez le compas de x en S. Portez cette même ouverture de x en R sur le diamètre. La distance RS est le côté du Pentagone régulier inscriptible au cercle proposé; & la ligne RC est le côté du Décagone régulier inscriptible au même cercle; ensorte que l'opération donne plus que l'on ne demandoit. Ce qu'il ne nous est pas possible de démontrer ici pour les raisons que l'on peut lire à la note (a).

PROBLÊME LXI.

142. Circonscrire un cercle au Pentagone ABCDE (*fig.* 129.).

RÉSOLUTION.

Coupez en deux parties égales les deux angles CDE, DEA par les lignes DO, ES. Le point I, où elles se rencontrent, est le centre du cercle, que l'on peut circonscrire au Pentagone, en lui donnant pour rayon IE ou ID.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que le point I est également éloi-

(a) Notre dessein étoit d'abord de ne point faire mention de la manière d'inscrire un Pentagone ou un Décagone, à cause qu'il ne nous est pas possible d'en démontrer la construction sans le secours des lignes proportionnelles, dont nous n'avons voulu faire aucun usage dans cette première Partie des Institutions, quoique nous ayons démontré toute la Trigonométrie, la mesure des terreins ou l'Arpentage, le partage ou la division des champs, plusieurs Problêmes d'optique & de fortification. Mais, tandis que nous étions à l'inscription des Poligones, nous avons cru qu'il n'étoit pas hors de propos de faire connoître tous ceux que l'on sçavoit inscrire. Dans le second tome, destiné à l'adolescence, nous suppléerons la seule démonstration qui nous manque ici, sans nuire en rien à l'exécution du projet que nous avons formé d'exercer la raison des enfans, en les appliquant à des objets matériels auxquels ils s'arrêtent naturellement.

gné des cinq points A, B, C, D, E, ou que les cinq lignes I E, I D, I C, I B, I A sont égales.

Les angles d'un Polygone régulier étant égaux, leurs moitiés seront égales. Ainsi l'angle I E D = l'angle I D E. Par conséquent I D = I E. En divisant aussi en deux parties égales l'angle D C B, l'angle I D C = l'angle I C D. Donc I D = I C. Continuant toujours la même opération & le même raisonnement, vous trouverez I C = I B = I A. Par conséquent les cinq lignes, qui partent du point I aux angles du Polygone, étant égales, le cercle décrit avec l'une d'elles du centre I, sera circonscrit au Pentagone; C. Q. F. D.

PROBLÊME LXII.

143. Inscrire un cercle dans un Pentagone donné A B C D E; c'est-à-dire, trouver un cercle dont tous les côtés du Pentagone proposé soient des tangentes (*fig* 130.).

RÉSOLUTION.

Coupez, comme ci-devant, en deux parties égales les deux angles A, E de ce Pentagone par les lignes E I, A I, dont le point de rencontre I est le centre d'un cercle, que l'on peut circonscrire au Pentagone (n°. 142.). De ce point I abbaissez une perpendiculaire I S sur l'un des côtés E A. Avec cette perpendiculaire du point I décrivez un cercle; il sera inscrit au Pentagone, ou, ce qui est la même chose, tous les côtés du Pentagone seront tangentes de ce cercle.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le point I est également

éloigné des cinq côtés de ce Polygone.

Puisque I est le centre d'un Polygone circonscriptible (const.), IA = IE = ID, &c. (n°. 142.); par conséquent le triangle isoscèle AIE est déterminé précisément de la même manière que le triangle isoscèle IED; la distance IN du point I au côté ED est donc égale à IS qui marque la distance du point I au côté AE. Ce raisonnement s'applique à tous les autres côtés. Ainsi le point I est à égale distance des cinq côtés de ce Polygone. Par conséquent le cercle décrit du point I avec une de ces perpendiculaires, touchera tous ces côtés, qui deviendront alors des perpendiculaires au rayon du cercle : mais une perpendiculaire au rayon du cercle est une tangente. Par conséquent tous les côtés du Pentagone touchent le cercle; il est donc inscrit, ainsi qu'on le demandoit.

On pourroit encore démontrer d'une autre manière, que toutes les perpendiculaires abbaissées du point I sont toutes égales à la perpendiculaire IS.

Après avoir tiré IS, abbaissez IN perpendiculairement sur le côté ED, & considérez les deux triangles rectangles ISE, INE qui ont le côté commun EI, & les angles sur ce côté égaux, chacun à chacun; puisque (const.) l'angle SEI = NEI. L'angle N étant droit comme l'angle S, il s'ensuit que le troisième angle NIE = le troisième angle SIE (n°. 78.). Ainsi la construction de ces deux triangles étant précisément la même, les côtés opposés à des angles égaux sont égaux. Donc IN = IS, & ainsi de suite, en abbaissant des perpendiculaires sur les autres côtés.

Cette manière d'inscrire un cercle dans un Pentagone peut s'appliquer à tous les Polygones quelconques : c'est pourquoi il ne sera plus question d'inscription de cercle.

PROBLÊME LXIII.

144. Construire un Pentagone sur la ligne donnée AB (*fig.* 131.).

RÉSOLUTION.

Nous avons proposé une méthode générale de résoudre ce Problême, nº. 135. Il est à propos d'en donner ici l'application.

Inscrivez dans un cercle quelconque un Pentagone OBCDE (nº. 141.), afin d'avoir l'angle EOB de ce Polygone. Au point A de la ligne AB donnée, faites l'angle PAB égal à l'angle EOB du Pentagone inscrit. Faites le même angle au point B. Que AP & BS soient égales chacune à la ligne AB. Aux extrémités P, S de ces lignes, formez encore des angles égaux chacun à l'angle EOB. Le point d'intersection M des côtés PM, SM de ces angles déterminera le Pentagone ABSMP, que l'on proposoit de construire sur la ligne AB.

DÉMONSTRATION.

Le Pentagone ABSMP est déterminé sur la ligne AB d'une manière semblable à celle dont le Pentagone OBCDE est construit sur la ligne OB, puisque ce dernier est le modèle du premier; mais (construction) le Pentagone OBCDE est un Polygone régulier; par conséquent le Pentagone ABSMP est aussi un Polygone régulier (*a*); C.Q.F.D.

(*a*) Cette façon de démontrer nous paroît fort élégante; mais elle ne convient pas peut-être à toutes sortes d'esprits: s'il nous revient qu'elle n'est pas assez rigoureuse, on se doute bien que nous sçaurons en produire d'une autre espèce. En attendant, nous avertirons que les Commençans s'en accommodent fort volontiers, parce qu'elle ne contraint point trop leur attention.

En coupant en deux parties égales l'arc du Pentagone ; on aura, avec une très-grande facilité, le Décagone, inscrit ou circonscrit. La construction de ce Polygone sur une ligne donnée se fera aussi, en suivant la méthode que nous venons d'exécuter par rapport au Pentagone.

PROBLÊME LXIV.

145. Inscrire dans un cercle un Pentadécagone ; c'est-à-dire, une figure régulière de 15 côtés.

Il faut observer que le Problême se réduit à trouver un arc qui soit la quinzième partie de la circonférence. Or, en divisant 360, valeur de la circonférence, par 15, on trouve 24. L'arc que l'on demande, doit donc être de 24^d. (*fig.* 132).

RÉSOLUTION.

Inscrivez dans ce cercle le Pentagone régulier & le triangle équilatéral, qui aient chacun un angle au même point A. L'arc CD sera de 24 degrés.

DÉMONSTRATION.

Le côté AC du triangle équilatéral soutient l'arc ABC de 120^d, troisième partie de la circonférence ; & le côté AB du Pentagone retranche un arc de 72^d, cinquième partie de la circonférence. Otez donc l'arc AB de l'arc ABC, c'est-à-dire, retranchez 72^d de 120^d, il restera $BC = 48^d$. Mais BCD est encore un arc de 72 ; retranchez donc BC de BCD ou 48 de 72, vous aurez $CD = 24^d$, c'est-à-dire, la quinzième partie de la circonférence.

C'est ainsi que tous les Commentateurs d'Euclide ont résolu ce Problême. Nous allons en produire deux autres résolutions beaucoup plus simples.

Seconde

Seconde manière d'inscrire dans un cercle un Pentadécagone (fig. 133).

Du même point A portez sur la circonférence du cercle le côté AB de l'Héxagone & le côté AC du Pentagone inscriptibles à ce cercle. Le double de l'arc BC sera l'arc du Pentadécagone.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que le double de l'arc BC = 24^d.

L'arc ABC du Pentagone = 72^d, & l'arc AB de l'Héxagone en vaut 60. Otant 60 de 72, il reste 12 valeur de l'arc BC, qu'il faut par conséquent doubler pour avoir l'arc de 24^d; C. Q. F. D.

Troisième manière d'avoir un Pentadécagone inscrit (fig. 133).

Du même point A pris à volonté sur la circonférence du cercle, portez le côté AS de l'Héxagone & le côté AO du Décagone; l'arc OS sera de 24^d.

DÉMONSTRATION.

L'arc AOS de l'Héxagone = 60^d, & l'arc AO du Décagone en vaut 36, dixième partie de la circonférence : ôtez 36 de 60, il reste 24 pour l'arc OS; C. Q. F. D.

Cette troisième manière fournit une construction & une démonstration beaucoup plus simples que les précédentes.

Voilà tous les Polygones réguliers, que l'on a pu jusqu'à présent inscrire ou circonscrire au cercle avec la règle & le compas, c'est-à-dire, en n'employant que la ligne droite & la circonférence du cercle (*a*). Ainsi l'on ne sçauroit, par le seul moyen

(*a*) Les Anciens appelloient Géométrique toute résolution qui

de la Géométrie élémentaire, diviser la circonférence en ses 360^{d}; car, pour rendre cette division complette, il faudroit pouvoir diviser en trois parties égales l'angle de trois degrés, comme nous allons le faire voir dans le Problême suivant.

PROBLÊME LXV.

146. Diviser la circonférence d'un cercle en ses 360 degrés; ou, ce qui est la même chose, diviser la demi-circonférence en 180^{d}. (*fig.* 134).

RÉSOLUTION.

Elevez perpendiculairement le rayon OA. Du point A portez sur la circonférence le côté AD de

n'avoit besoin que du cercle & de la ligne droite. Ainsi, quand on employoit des lignes d'une autre espèce pour résoudre, par exemple, le Problême de *la trissection de l'angle*, où il s'agit de diviser un angle quelconque en trois parties égales, ils ne vouloient pas que cette résolution fût Géométrique: apparemment parce qu'ils jugeoient qu'une ligne courbe, décrite par un autre instrument que le compas, étoit peu exacte.

Tout le monde est tenté de croire que c'est la chose du monde la plus aisée, que de couper en trois parties égales un angle quelconque; & cependant, depuis plus de deux mille ans, on n'a pu en venir à bout qu'en tâtonnant, si l'on excepte le moyen qu'a fourni l'application de l'Algebre à la Géométrie, moyen, quoique démontré, plus long & plus défectueux dans la pratique que le tâtonnement. N'allez pourtant pas conclure de-là, comme certains Philosophes, que *la perfection de notre esprit auroit moins de lieu, & se feroit moins connoître, si nos organes étoient plus parfaits*, c'est-à-dire, si nous appercevions, par exemple, d'un coup d'œil la trissection de l'angle; *parce que, disent-ils, l'esprit ne cherche & ne trouve des ressources que pour corriger l'imperfection de nos organes.*

Notre esprit se feroit élevé à des connoissances proportionnées à sa curiosité & à ses besoins. Dans l'état d'organes plus parfaits, il auroit monté plus haut, & n'auroit jamais compté ses degrés de perfection que du point dont il seroit parti. Tout n'est que comparaison. Nous donnons le nom de parfait à ce qui nous paroit meilleur; tandis que des êtres d'un autre ordre se trouveroient dégradés avec de pareils attributs. Mais ne parlons jamais aux jeunes gens de ce rafinement d'idées. Calculons ce que la nature nous offre suivant le systême qu'elle a établi. Vouloir pénétrer ce qui arriveroit dans une autre supposition, c'est oublier que nous aurions sans doute alors des idées des choses totalement différentes de celles qui nous occupent.

l'Héxagone & le côtés AE du Pentagone inſcriptibles au même cercle. Coupez en deux parties égales l'arc DC au point H. Je dis que l'arc EH = 3 degrés; il n'y aura donc qu'à le couper méchaniquement (a) en trois parties égales ; & la circonférence ſe trouvera diviſée en 360 degrés.

DEMONSTRATION.

Prouvons que l'arc EH = 3^{d}. Par la conſtruction l'arc ADE du Pentagone = 72^{d}; & l'arc AD = 60. Donc l'arc DE = 12. Mais l'arc ADC = 90^{d}; donc DC = 30, puiſque AD en vaut 60. Or on a coupé CD en deux parties égales au point H; ainſi DEH = 15^{d}. On a déja vu que DE = 12; donc EH = 3.

Indépendamment de l'utilité dont les Polygones réguliers ſont pour la fortification, leur ſymmétrie touche agréablement nos organes : ainſi les Arts de goût font uſage de ces Polygones : on les voit employés à carreler preſque tous les appartemens. Mais il n'y a qu'un certain nombre de ces Polygones, dont l'uſage ſoit poſſible ; & la Géométrie ſçait déterminer ce nombre.

PROBLÈME LXVI.

147. Déterminer les figures régulières avec leſquelles on peut carreler un appartement, en n'employant que des figures égales & de la même eſpèce.

(a) On dit que l'on éxécute une opération *méchaniquement* ; lorſque l'on y parvient ſans aucune règle démontrée, qui détermine à la rigueur ce que l'on cherche. Telle eſt l'opération de la triſſection de l'angle avec le ſeul moyen du cercle & de la ligne droite ; il y a pourtant quelques angles que l'on diviſe géométriquement en trois parties égales ; tel eſt l'angle droit. On diviſe auſſi exactement en trois parties égales l'angle de 9 degrés, auſſi-bien que les angles de 18, de 27, de 36, de 54, de 72, &c. comme il eſt évident à ceux qui ont bien compris la réſolution du Problême 64.

RÉSOLUTION.

Il n'y a point d'autres figures régulières, qui puissent remplir ce dessein, que les triangles équilatéraux, les quarrés & les Héxagones.

DÉMONSTRATION.

Avant que d'en faire le dénombrement, on observera que les angles des Polygones, destinés à cet usage, doivent s'ajuster de manière qu'ils ne laissent aucun espace vuide. Mais on sçait que tous les angles, que l'on peut former autour d'un même point sur un plan, ne valent que quatre angles droits. Ainsi les figures régulières, dont les angles réunis au même point donnent précisément 360^d, sans laisser entr'eux aucun intervalle, sont les seules qui puissent satisfaire au Problême proposé. Il faut donc rechercher celles qui ont cette propriété.

Nous avons vu que l'angle du triangle équilatéral $= 60^d$; par conséquent six de ces angles, réunis sur un plan autour d'un même point, ne laisseront aucun vide; car 6 fois $60 = 360$. La figure 135 est composée de triangles équilatéraux.

L'angle du quarré $= 90^d$. Quatre de ces angles produiront donc l'effet demandé, puisque 4 fois $90 = 360$. Voyez les quatre quarrés disposés autour du point O. (*fig.* 136.)

Le Pentagone ne sçauroit être mis au nombre des figures, dont nous avons ici besoin, puisque l'angle du Pentagone (n°. 121.) $= 108^d$. Or 3 fois $108 = 324 < 360$, & 4 fois $108 = 432 > 360$.

L'angle de l'Héxagone $= 120^d$. Par conséquent trois de ces angles $= 360^d$. Ainsi ce Polygone est une des figures régulières, dont nous pouvons faire

usage, comme on le voit en la figure 137.

Que l'on prenne l'angle de l'Heptagone $= 128\frac{4}{7}$. Ce nombre pris 3 fois, donnera plus de 360. Ainsi l'Heptagone ne sçauroit nous convenir : à plus forte raison l'Octogone doit être rejetté ; car son angle est plus grand que celui de l'Heptagone. Il en est ainsi de tous les Polygones au-dessus de l'Héxagone.

On ne peut donc carreler les appartemens avec des figures régulières, différentes du Triangle équilatéral, du Quarré, & de l'Héxagone ; C. Q. F. Q.

Pour confirmer cette vérité, on fera attention qu'il faut au moins trois angles plans, pour remplir l'espace qui règne autour d'un point. Deux angles n'y suffiroient pas ; parce que deux angles, si obtus qu'ils puissent être, ne valent jamais 360^{d}, valeur néanmoins nécessaire, afin que des angles disposés autour d'un point sur un plan ne laissent aucun vide entr'eux. Or, comme la réunion des trois angles, qui appartiennent à des Polygones au-dessus de l'Héxagone, donne toujours plus de 360 degrés, il s'ensuit évidemment qu'il est inutile de pousser les recherches au-delà de l'Héxagone (*a*).

Les Polygones réguliers contribuent encore à l'embellissement des jardins. Le contour des bassins que l'on y creuse pour contenir & recevoir des eaux plattes & jaillissantes, est ordinairement un Polygone régulier.

PROBLÊME LXVII.

148. Moyen très-simple de tracer un Polygone régulier sur le terrein (*fig.* 138.).

(*a*) On fera donc voir aux Commençans sur le pavé même, qu'il n'y a que trois sortes de figures régulières qui satisfont à ce Problême ; Et afin que le témoignage des yeux appuie celui de la raison, on découpera d'autres Polygones construits sur du carton, sur du papier, &c. on essayera de réunir plusieurs de leurs angles en un seul point. L'expérience apprendra que deux de ces angles laisseront quelque intervalle

Décrivez d'abord sur un grand carton, sur un ais ou sur une planche bien platte & bien unie, le Polygone que vous avez dessein de tracer: supposons que ce soit un Octogone (n°. 135.); on peut lui donner un pied de rayon & même plus (*fig.* 138.); ceux qui ont un plus grand rayon, sont les plus avantageux. Vous placerez le centre de ce Polygone au point que l'on aura déterminé, pour avoir cette figure tracée sur le terrein, & l'on y arrêtera le carton par le moyen d'un piquet planté à son centre. On attachera à ce piquet l'extrémité d'une corde, d'une longueur convenue, garnie d'un anneau, afin que la corde tendue puisse tourner autour du piquet, sans s'y entortiller. Après cela vous tendrez la corde successivement sur les rayons CA, CB, CD, &c. A chaque coup de cordeau vous planterez un piquet S à son extrémité; & les huit piquets S, S, S, &c. détermineront les huit côtés de l'Octogone, que l'on se proposoit de tracer sur le terrein. Il n'y aura donc plus qu'à tracer un sillon droit de S en S, en S, &c. ce que la résolution des Problêmes précédens a rendu assez clair.

Les cordes ou les cordeaux, dont on se sert dans ces opérations, ont toujours quelque fléxibilité; quoiqu'elles paroissent très bien tendues sur un rayon, elles peuvent néanmoins s'en écarter insensiblement sur une petite étendue, mais très-sensiblement sur une distance considérable. Afin donc d'éviter cet inconvénient, on assignera deux piquets opposés sur le piquet planté au centre C; alors on aura l'Octogone tracé avec toute l'éxactitude que l'on peut souhaiter.

entr'eux, ou que l'un s'étendra en partie sur l'autre; ce qui produit de l'excès d'une part, & du défaut de l'autre.

Fin du premier Tome.



Fig. 3.

O M N S T

S

Fig. 6.

B

Fig. 7.

A B

Fig. 9.

D E F B

D

C

Fig. 13.

r s

A D B

B

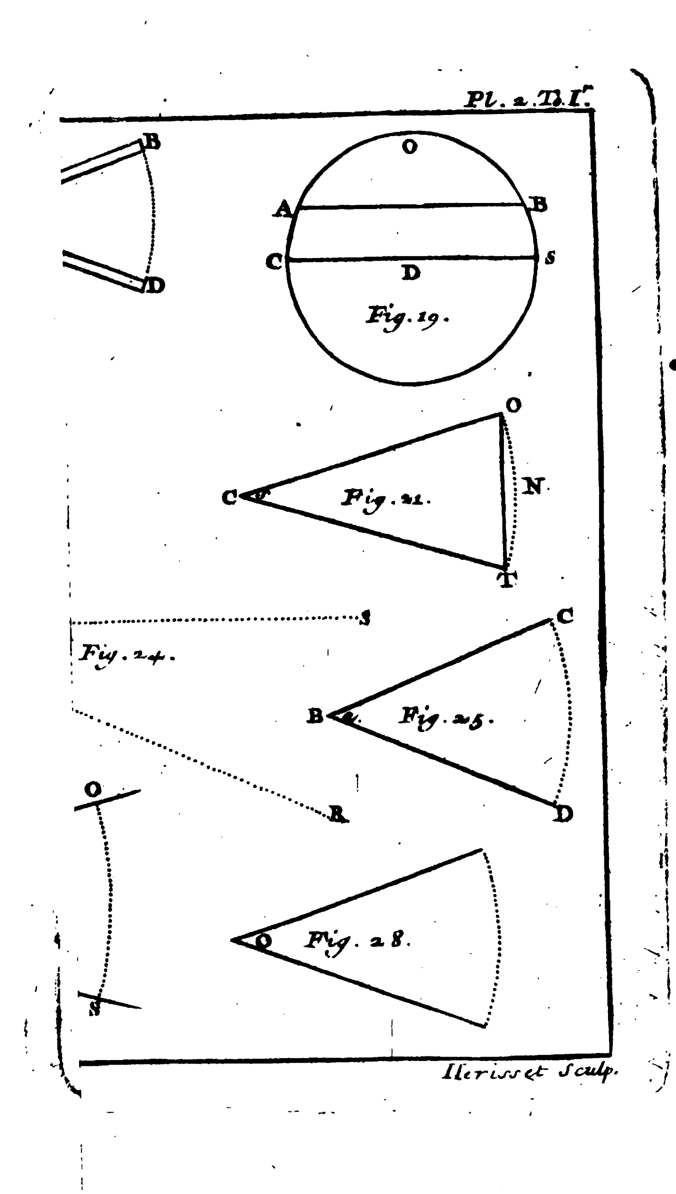
Fig. 16.

O T

C

A D B

Herisset Sculp.



Herisset Sculp.

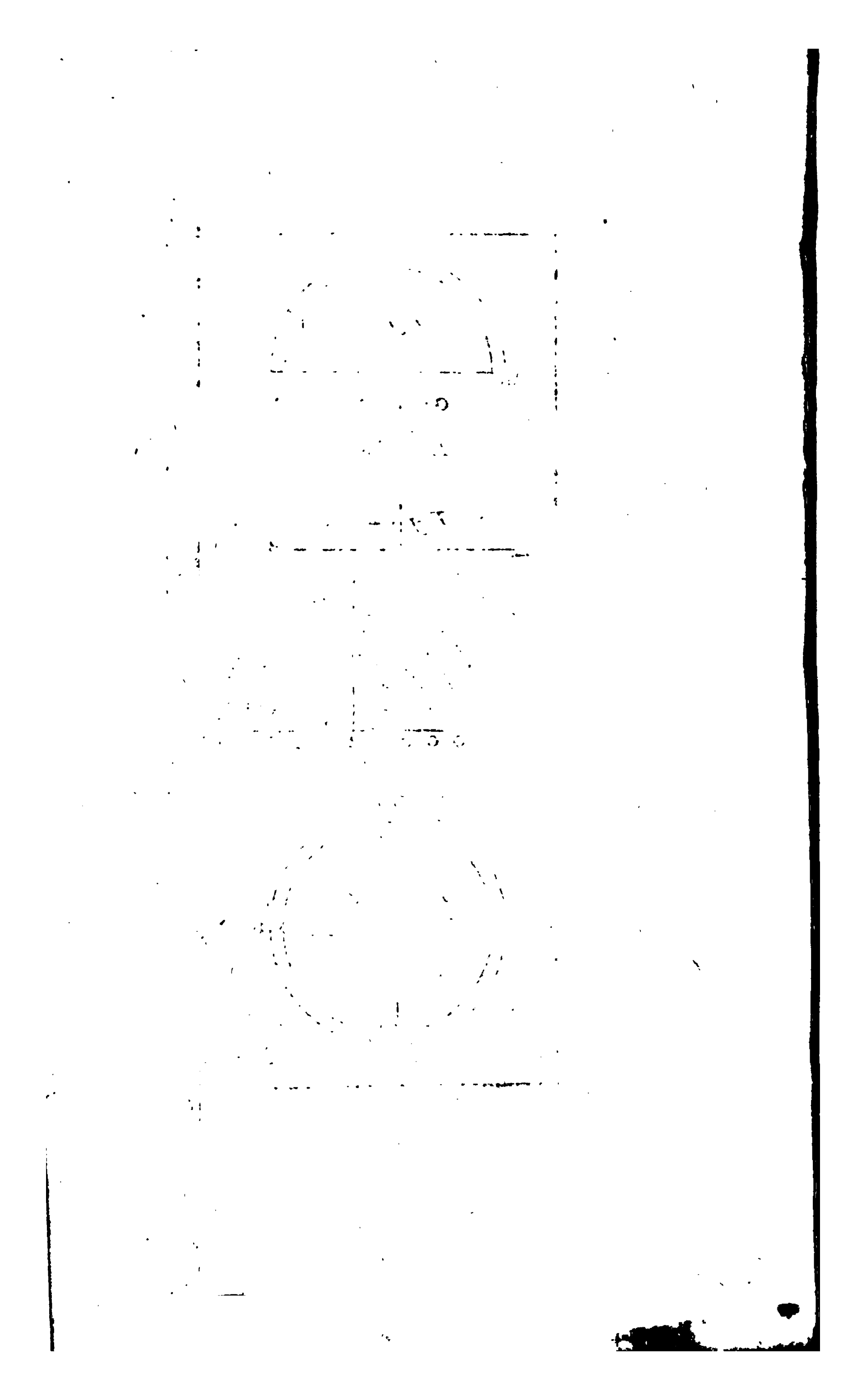
Fig. 31.

Fig. 34.

Fig. 37.

Fig. 41.

Herisset sculp.

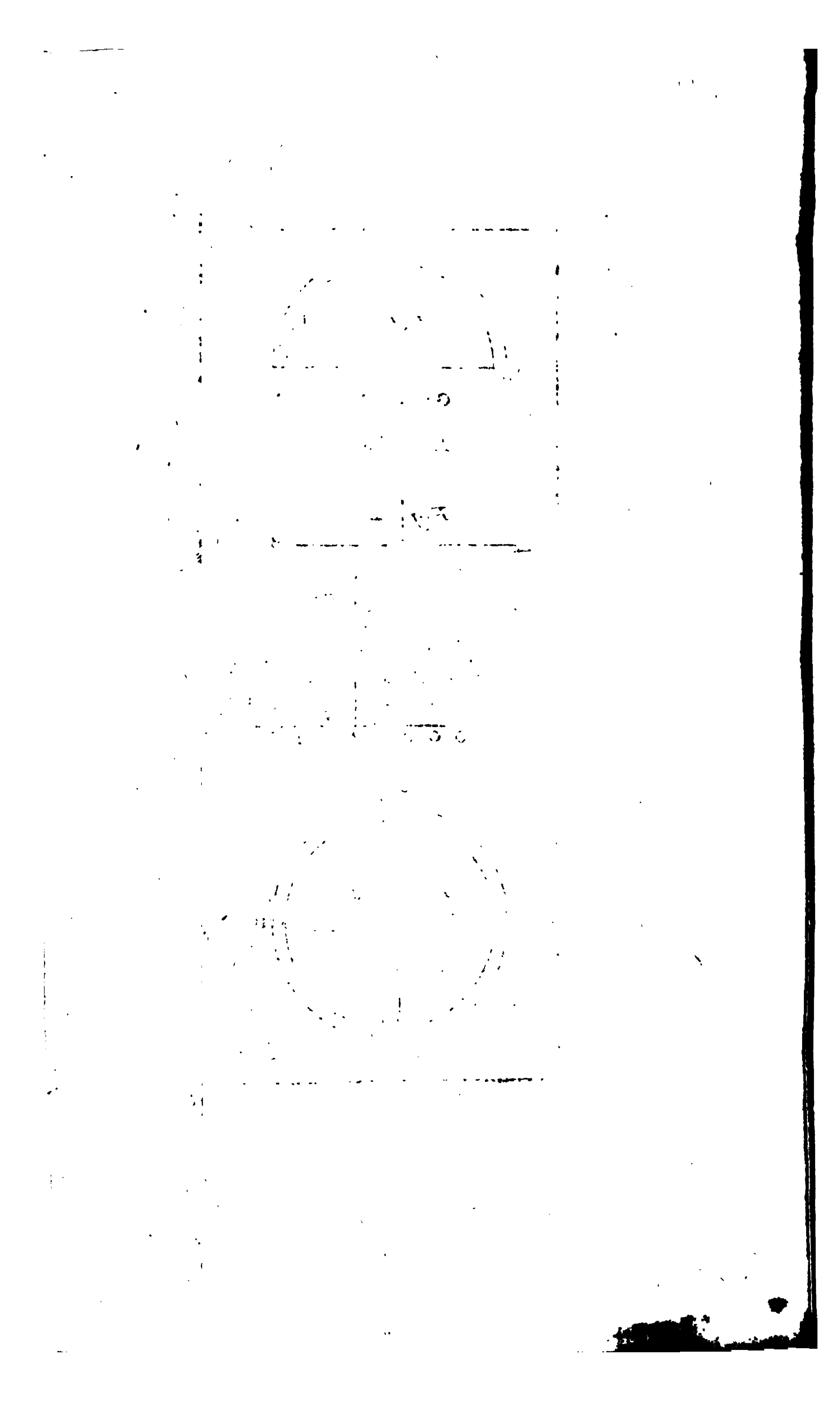


C
Fig. 44.
s t x
r y
A D B

C
Fig. 45.
S
A D B
S

Fig. 48.
A B
B
O
D

Herisset sculp.



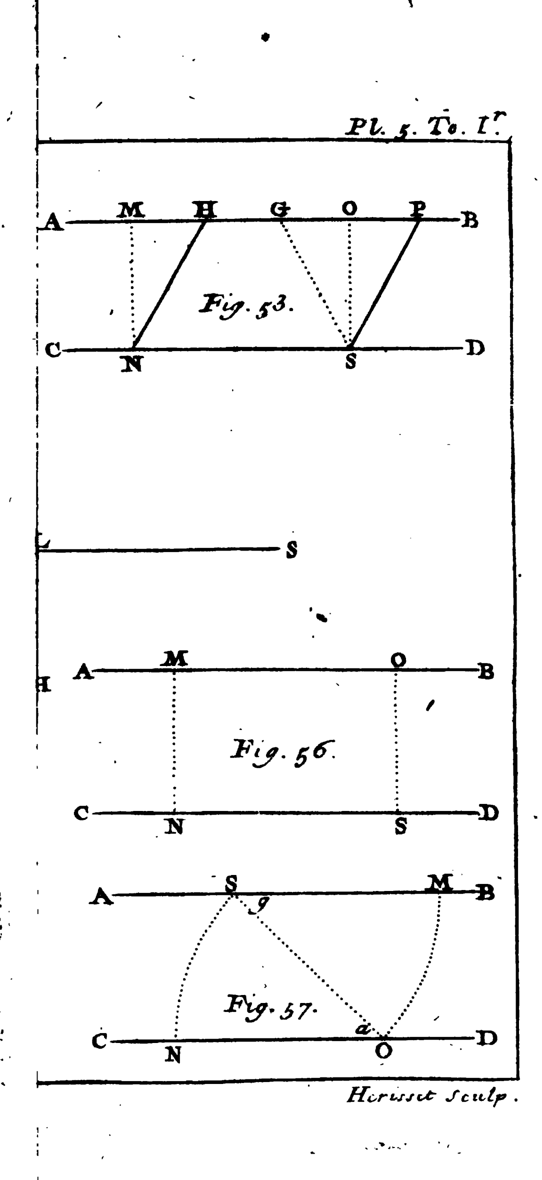
C
Fig. 44.
s t x
r y
A D B

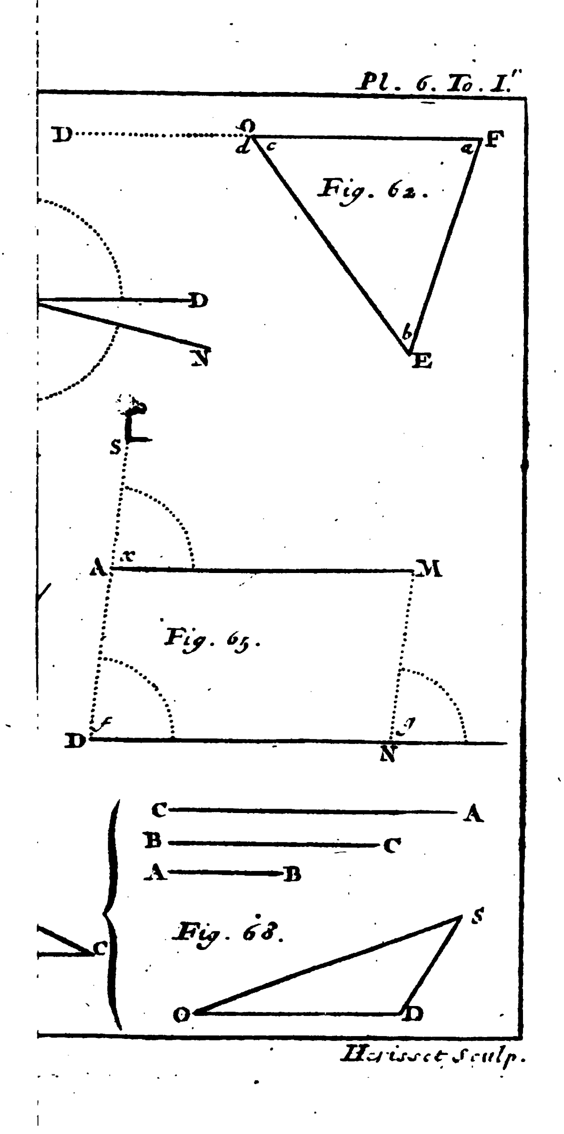
C
Fig. 45.
S
A D B
S

Fig. 48.
A B
B
O
D

Herisset sculp.




Pl. 5. To. Ir.
A M H G O P B
Fig. 53.
C N S D
S
A M O B
H
Fig. 56.
C N S D
A S M B
g
Fig. 57.
a
C N O D
Herisset Sculp.



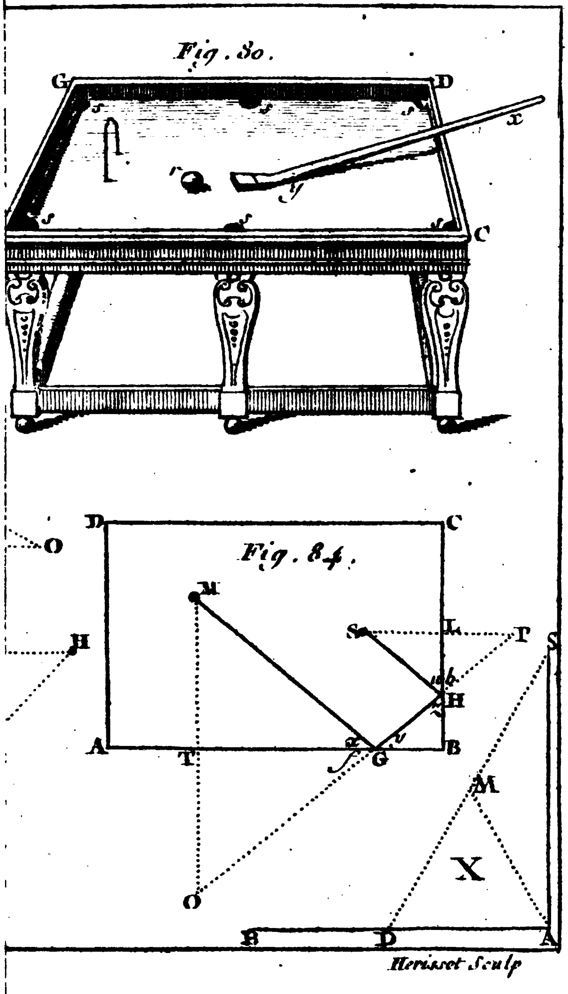
Herisset Sculp.

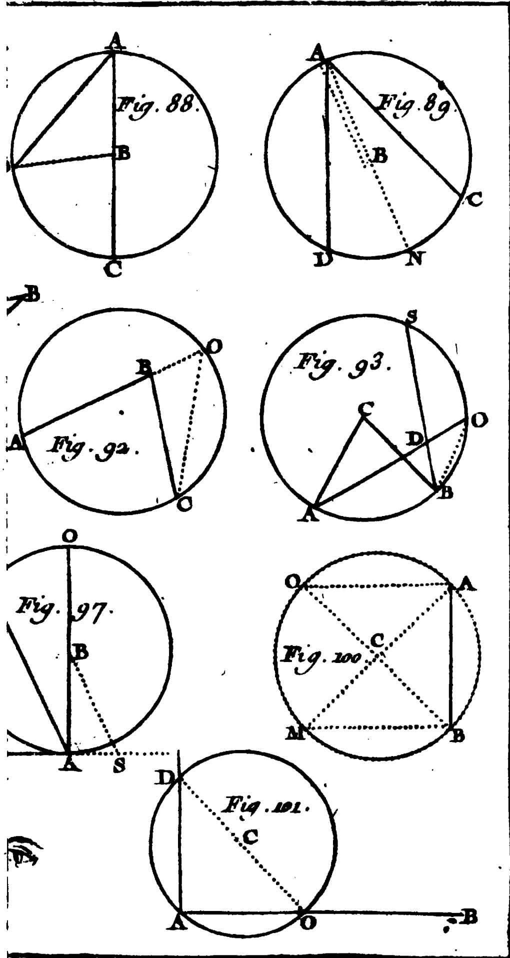
Fig. 76.

Fig. 77.

Fig. 78.

Herisset Sculp.


Fig. 80.
G
D
C
x
y
r
Fig. 84.
D
C
M
S
L
P
H
A
T
G
B
O
S
M
X
B
D
A
Herisset Sculp



Herisset Sculp

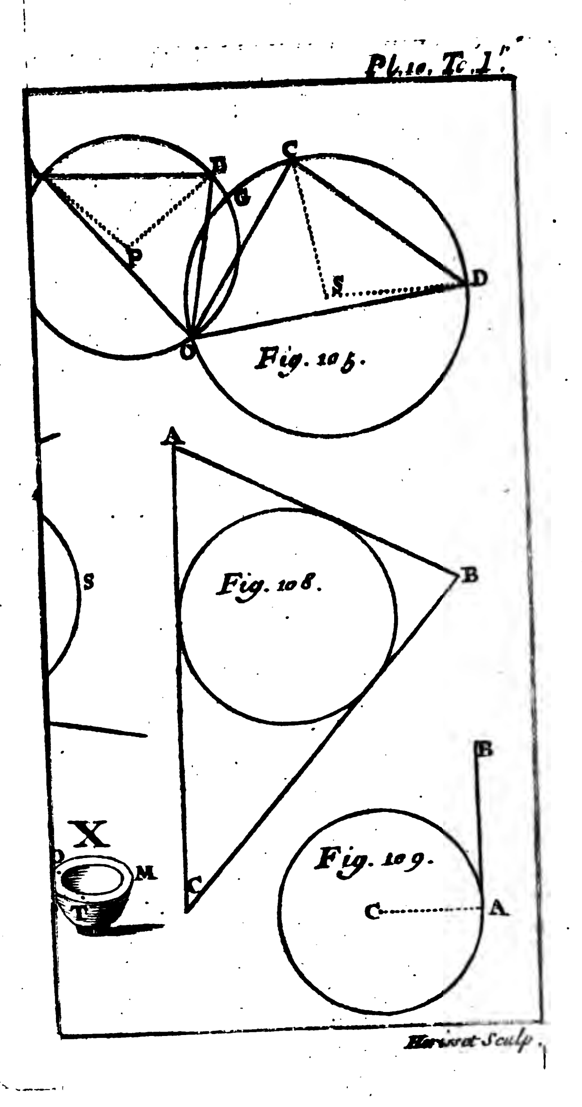

B
G
C
P
S
D
O
Fig. 105.
A
S
Fig. 108.
B
X
O
M
T
C
B
Fig. 109.
C
A
Herisset Sculp.

Fig. 112.

Fig. 117.

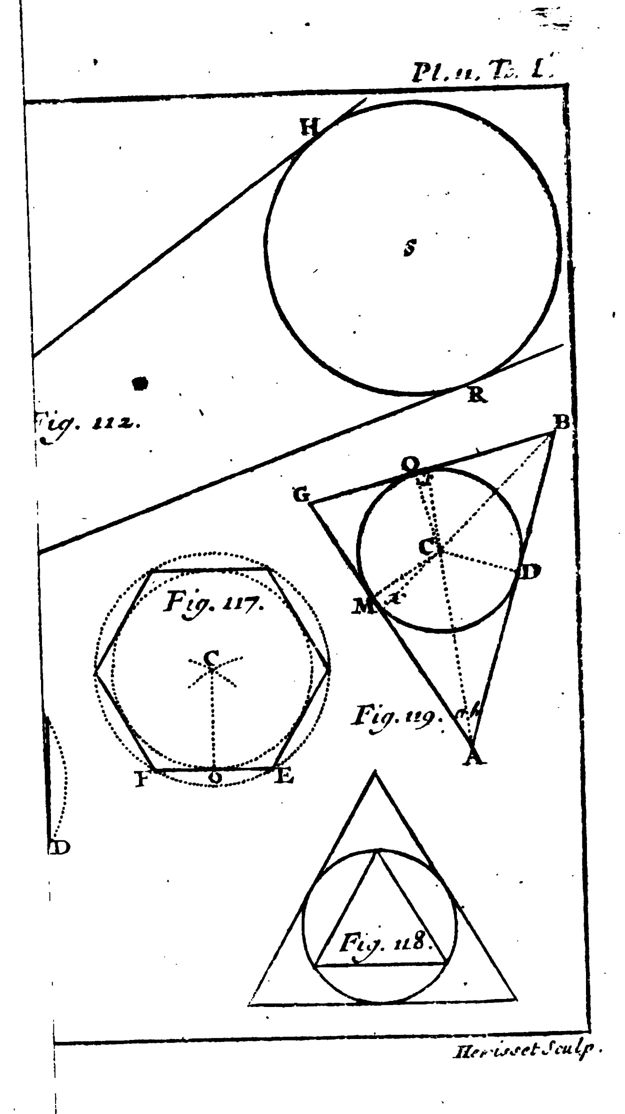
Fig. 119.

Fig. 118.

Herisset Sculp.

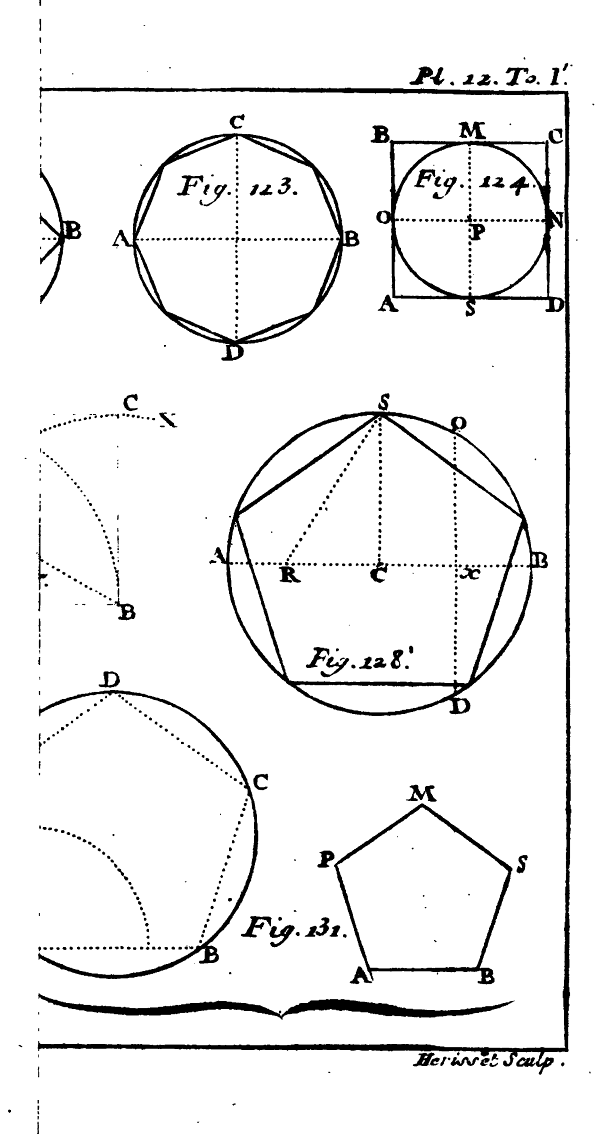


Pl. 11. T. I.

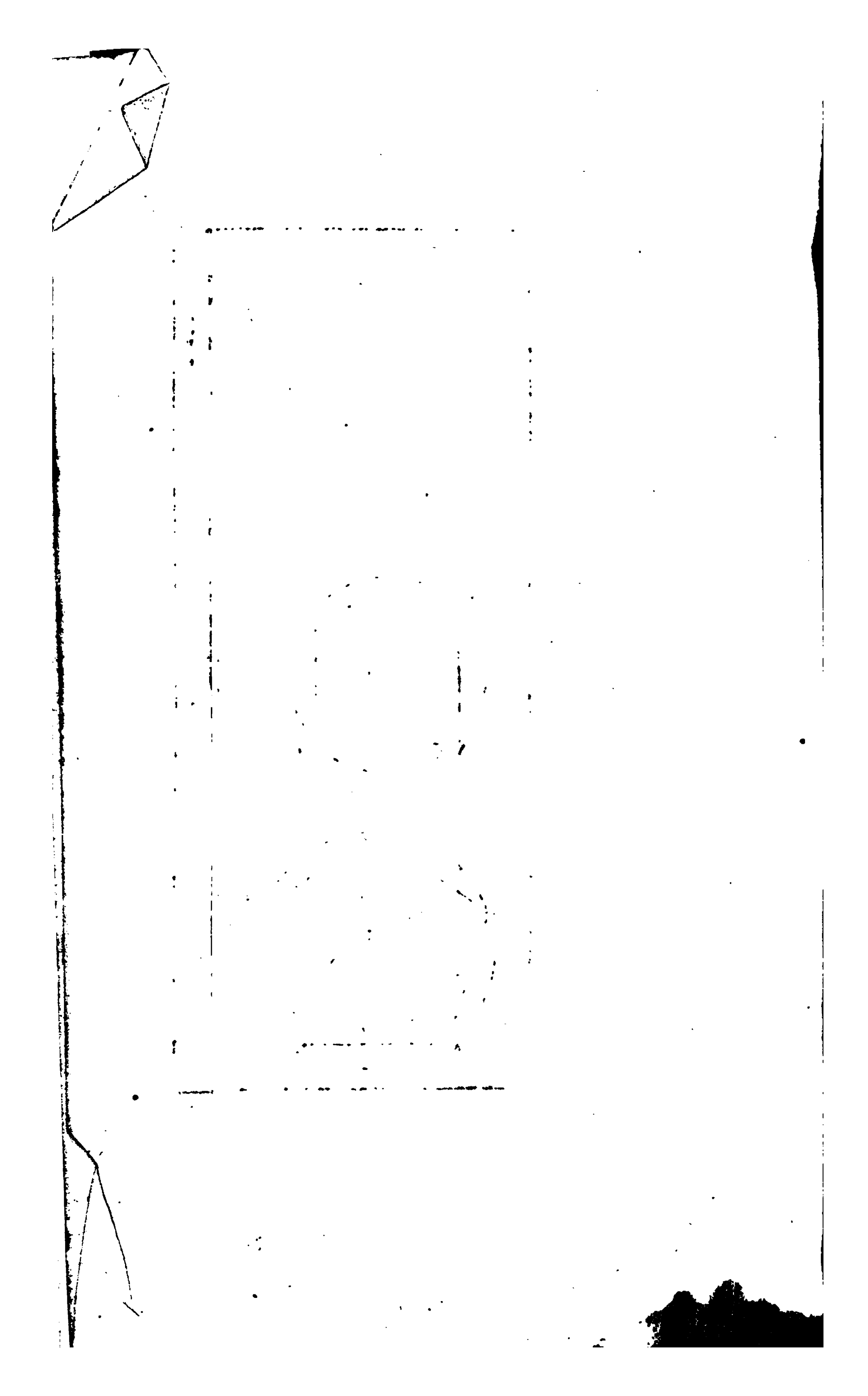


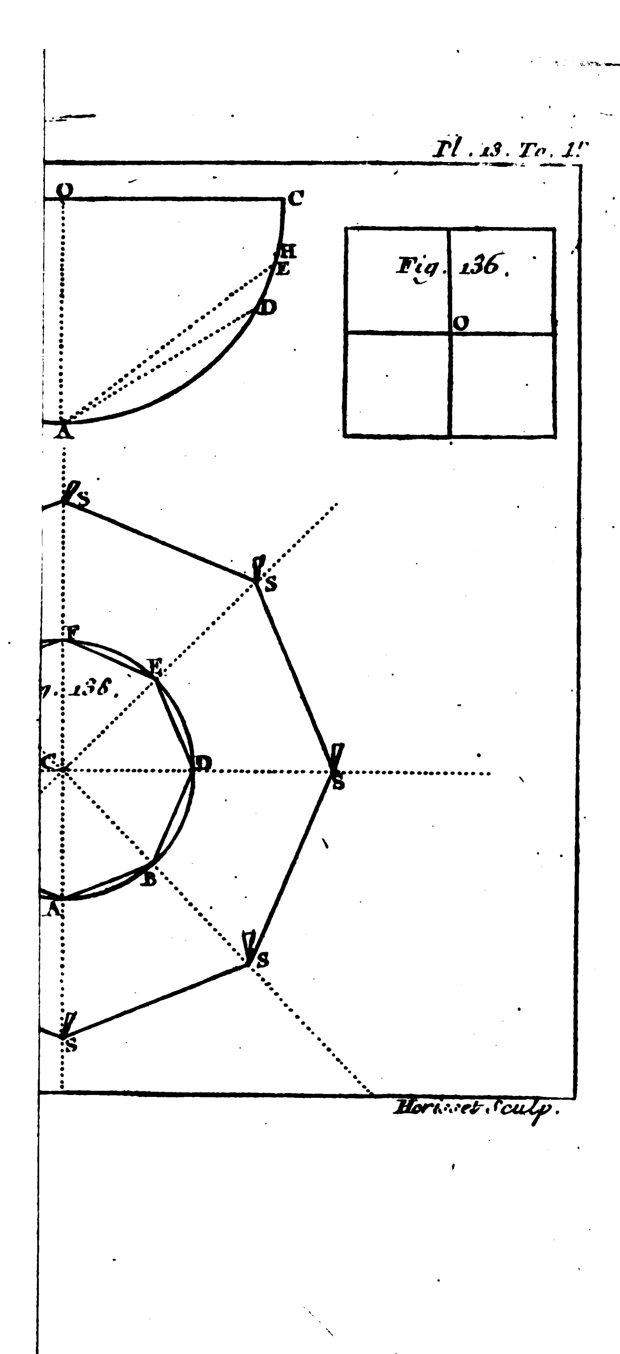
Herisset Sculp.

Pl. 12. To. 1.



Heriſſet Sculp.




O
C
H
E
D
A
Fig. 136.
O
S
S
F
E
g. 136.
C
D
S
B
A
S
S
Horisset Sculp.